Applications et bijections

1 Ensembles et opérations

Rappels : Un ensemble E est une collection d'objets appelés éléments de E.

Si x est un élément de E, on note $x \in E$, sinon on note $x \notin E$.

Si x et y représentent le même élément de E, on note $x = y$, sinon on note $x \neq y$.

Un ensemble contenant un seul élément x est appelé singleton, et noté $\{x\}$.

Un ensemble qui ne contient aucun élément est appelé ensemble vide, et noté $\emptyset$.

Définition 1. Soient E et A deux ensembles.

1. On dit que A est **inclus** dans E si $x \in A \Longrightarrow x \in E$.

   Dans ce cas, on dit que A est une **partie** (ou un sous-ensemble) de E et on note $A \subset E$.

2. On dit que E et A sont **égaux** si $x \in A \Longleftrightarrow x \in E$. Dans ce cas, on note $A = E$.

3. **L'ensemble des parties** (ou un sous-ensembles) de E est noté $\mathscr{P}(E)$.

Exemple 1. Expliciter $\mathscr{P}(E)$ dans le cas où $E = \{1, 2, 3\}$.

Définition 2. Soit E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$.

1. Le **complémentaire** de A dans E est l'ensemble $\overline{A} = \{ x \in E \ / \ x \notin A \}$, noté $\complement_E^A$ ou $E \backslash A$.

2. **L'intersection** de A et B est l'ensemble $A \cap B = \{ x \in E \ / \ x \in A \text{ et } x \in B \}$.

3. **La réunion** de A et B est l'ensemble $A \cup B = \{ x \in E \ / \ x \in A \text{ ou } x \in B \}$.

Exemple 2. Lors d'un contrôle, on note S l'ensemble des composants qui ont un défaut de soudure, E celui des composants qui ont un défaut électronique et R celui des composants refusés.

Décrire, à l'aide de ces ensembles, l'ensemble A des composants qui n'ont aucun défaut, B celui des composants qui ont exactement un défaut et C celui des composants pour lesquels il y a une erreur de contrôle.

Propriété 1. Si E est un ensemble et si $A, B \in \mathscr{P}(E)$ alors

1. $\overline{E} = \emptyset$, $\quad \overline{\emptyset} = E$ et $\quad \overline{\overline{A}} = A$
2. $A \cap B \subset A$, $\quad A \cap B \subset B$, $\quad A \subset A \cup B$ et $\quad B \subset A \cup B$
3. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\quad$ et $\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\quad$ **Loi de Morgan**

Exemple 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \;/\; |x - \pi| \leq 10^{-n} \right\}$.

Déterminer $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, $I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$, $\overline{U}$ et $\overline{I}$.

Définition 3. Soient $E, F, E_1, E_2, \ldots, E_n$, des ensembles.

1. **Le produit cartésien** de E et F est l'ensemble $E \times F = \{ (x, y) \;/\; x \in E \text{ et } y \in F \}$.
2. Le produit cartésien de $E_1, E_2, \ldots, E_n$ est l'ensemble
$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \;/\; \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k \in E_k \right\}.$$
3. En particulier, $\quad E^n = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;/\; \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k \in E \right\}$.

   Un élément $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de E^n est appelé $n-$**uplet** (ou $n-$liste) d'éléments de E.

Exemple 4. Représenter les ensembles $\mathbb{N}^2$, $[\![0, 3]\!] \times [\![2, 4]\!]$, $[0, 1] \times \mathbb{R}$ et $[0, 1]^3$.

2 Applications d'un ensemble dans un autre

Définition 4. Soient E et F deux ensembles non vides.

1. On définit une **application** (ou fonction) f de E dans F en associant, à chaque élément x de E, un unique élément de F, noté $f(x)$. Ce qui s'écrit $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$
2. On appelle **graphe** de f l'ensemble des couples $(x, y) \in E \times F$ tels que $y = f(x)$.
   Pour un tel couple, y est **l'image** de x (par f) et x est **un antécédent** de y (par f).
3. On note $\mathscr{F}(E, F)$ (ou F^E) l'ensemble des applications de E dans F.

Exemple 5. Définir $\mathscr{F}([\![1, 4]\!], \mathbb{C})$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 5. Soit un ensemble E non vide et $A \in \mathscr{P}(E)$.

La fonction indicatrice de A est l'application $\mathbf{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie par
$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$.

Exemple 6. Tracer le graphe des fonctions réelles $u :\ x \mapsto \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ et $f :\ x \mapsto x^2\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

Définition 6. Soit $f : E \to F$ et $A \in \mathscr{P}(E)$.

On appelle **restriction** de f à A, l'application notée $f_{|A}$ définie par $f_{|A} : \left| \begin{array}{ll} A & \longrightarrow F \\ x & \longmapsto f(x) \end{array} \right.$.

Exemple 7. Déterminer les restrictions à $\mathbb{R}$ des fonctions complexes $z \longmapsto |z|$ et $z \longmapsto \mathrm{e}^z$.

Définition 7. Soient $f : E \to F$, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $B \in \mathscr{P}(F)$.

1. On appelle **image directe** de A par f l'ensemble noté $f(A)$ défini par
$$f(A) = \{\ f(x),\ x \in A\ \} \subset F.$$
2. On appelle **image réciproque** de B par f l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ défini par
$$f^{-1}(B) = \{\ x \in E\ /\ f(x) \in B\ \} \subset E.$$

Exemple 8. Soit $f : \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ t & \longmapsto \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t} \end{array} \right.$

1. Déterminer l'image de l'intervalle $[0,1[$ par f.
2. Déterminer l'image réciproque de $\mathbb{U}_3$ par f.

Définition 8. Soient $f : A \to B$ et $g : E \to F$ telles que $f(A) \subset E$.

On appelle **composée** de f et g l'application $g \circ f : \left| \begin{array}{ll} A & \longrightarrow F \\ x & \longmapsto g(f(x)) \end{array} \right.$.

Exemple 9. Définir $g \circ f$ si $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{2}(x+y) \end{array} \right.$

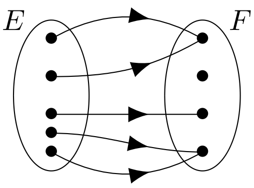
Définition 9. Soit $f : E \to F$.

1. f est dite **injective** si tout élément de F possède au plus un antécédent dans E.

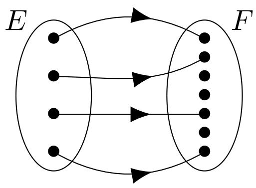
2. f est dite **surjective** si tout élément de F possède au moins un antécédent dans E.

3. f est dite **bijective** si tout élément de F possède un unique antécédent dans E.

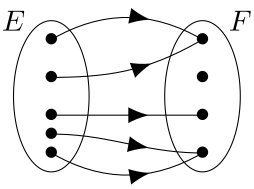
   Dans ce cas, on appelle (bijection) **réciproque** de f la fonction
   $f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) \end{array} \right.$, où $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f dans E.



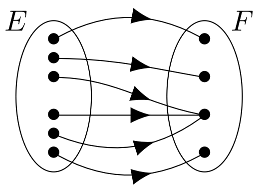
Application non injective



Application injective



Application non surjective



Application surjective

Exemple 10. La fonction f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

a) $f : \left| \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{2i\pi t} \end{array} \right.$ b) $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{2}(x+y) \end{array} \right.$ c) $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$

Remarque : $f : E \to F$ est bijective ssi pour tout $(x,y) \in E \times F$, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution, notée $f^{-1}(y)$:

$$\forall (x,y) \in E \times F, \quad y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Dans ce cas, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

Propriété 2. Soient $f : A \to E$ et $g : E \to F$.

1. Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.

2. Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

3. Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

3 Cas des fonctions réelles

3.1 Généralités

Propriété 3. Soit $f : I \to J$ une fonction réelle bijective.

Les graphes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ de f et f^{-1} (respectivement) sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple 11. Soit $f : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, en explicitant sa réciproque.
2. Tracer l'allure des graphes de f et f^{-1} dans un même repère orthonormé.

Théorème 1. de la bijection Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle I, alors

1. $f(I)$ est un intervalle,
2. f réalise une bijection de I sur $f(I)$,
3. f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même monotonie que f.

Exemple 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ impair.

a) Montrer que la fonction $p_n : x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Dresser le tableau de variation de sa réciproque, appelée fonction racine *n-ième*.

Théorème 2. Soit $f : I \to J$ bijective et dérivable sur I.

Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et $\quad (f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

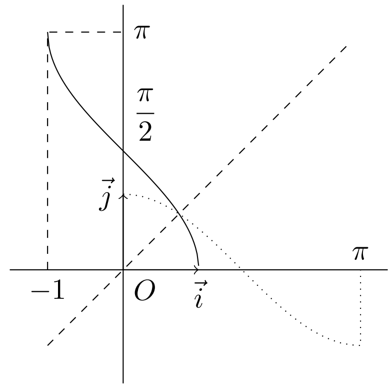
Exemple 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ impair. Déterminer la dérivée de la fonction racine *n-ième*.

Remarque : Si $f : I \to J$ est bijective et dérivable sur I, et si $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$ et son graphe admet une tangente verticale en son point d'abscisse $f(a)$.

3.2 Fonction arccosinus

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$.
Elle réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.

La réciproque de la restriction de cosinus à $[0, \pi]$ est la fonction arccosinus, notée arccos.



Courbe de $x \mapsto \text{Arccos}\, x$

Propriété 4. La fonction arccos est définie et continue sur $[-1, 1]$ et

1. $\forall x \in [0, \pi], \forall y \in [-1, 1], \;\; y = \cos(x) \iff x = \arccos(y)$
2. $\forall x \in [0, \pi], \;\; \arccos(\cos(x)) = x \quad$ et $\quad \forall y \in [-1, 1], \;\; \cos(\arccos(y)) = y.$

Exemple 14. Calculer $\arccos(0)$, $\arccos(1/2)$, $\arccos(\sqrt{3}/2)$ et $\arccos(-\sqrt{2}/2)$.

Propriété 5. La fonction arccos est dérivable sur $]-1, 1[$, et

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Si u est dérivable sur I et $u(I) \subset]-1, 1[$, alors $\arccos u$ est dérivable sur I et

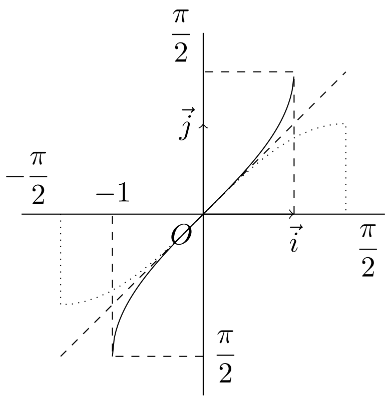
$$(\arccos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$$

Exemple 15. Étudier la fonction $f : x \mapsto \arccos(x) + \arccos(-x)$.

3.3 Fonction arcsinus

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Elle réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$.

La réciproque de la restriction de sinus à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est la fonction arcsinus, notée arcsin.



Courbe de $x \mapsto \text{Arcsin}\, x$

Propriété 6. La fonction arcsin est définie et continue sur $[-1,1]$, impaire, et :

1. $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\forall y \in [-1,1]$, $y = \sin(x) \iff x = \arcsin(y)$
2. $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$ et $\forall y \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin(y)) = y$.

Exemple 16. Calculer $\arcsin(0)$, $\arcsin(1/2)$, $\arcsin(\sqrt{3}/2)$ et $\arcsin(-\sqrt{2}/2)$.

Propriété 7. (dérivation) La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Si u est dérivable sur I et $u(I) \subset]-1,1[$, alors $\arcsin u$ est dérivable sur I et

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

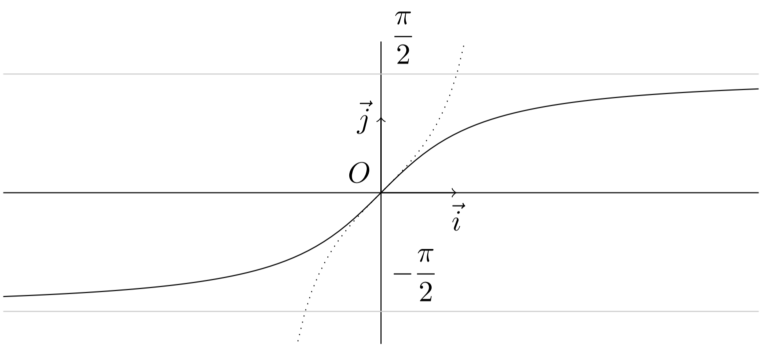
Propriété 8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$

Exemple 17. Étudier la fonction $f : x \mapsto \arcsin(3x+1)$.

3.4 Fonction arctangente

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Elle réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$.

La réciproque de la restriction de tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est la fonction arctangente, notée arctan.



Courbe de $x \mapsto \text{Arctan}\ x$

Propriété 9. La fonction arctan est définie et continue sur $\mathbb{R}$, impaire, et :

1. $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[, \forall y \in \mathbb{R},\ \ y = \tan(x) \Longleftrightarrow x = \arctan(y)$
2. $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ \arctan(\tan(x)) = x$ et $\forall y \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan(y)) = y$.

Exemple 18. Calculer $\arctan(0)$, $\arctan(1)$, $\arctan(\sqrt{3})$ et $\arctan(-\sqrt{3}/3)$.

Propriété 10. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Si u est dérivable sur I, alors la fonction $\arctan u : x \mapsto \arctan(u(x))$ est dérivable sur I et

$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

Propriété 11. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = +\frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1.$

Exemple 19. Étudier et représenter graphiquement la fonction
$f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.