Arithmétique dans $\mathbb{N}$

Exercice 1 On pose $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n - 1$.

1. Calculer les termes u_1, u_2 et u_3.
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 On pose $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Montrer que l'on définit ainsi une suite de nombres entiers.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

Exercice 3 Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n$.

Exercice 4

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 divise $(n+1)^n - 1$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7.

Exercice 5 Soit n un entier naturel non nul.

1. Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne de n par 6 ?
2. Montrer que $n(2n+1)(7n+1)$ est un multiple de 6.

Exercice 6 Déterminer le PGCD et le PPCM de a et b :

1. $a = 598$ et $b = 84$ 2. $a = 679949$ et $b = 5760649$ 3. $a = 10^n$ et $b = 9$, $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 7 Montrer que

1. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel. 2. $\ln(2)/\ln(3)$ est irrationnel.

Exercice 8 Déterminer les couples (x, y) d'entiers relatifs vérifiant :

$$13x - 8y = 1 \text{ (on cherchera une solution particulière).}$$

Exercice 9

1. Montrer que si un entier b divise un entier a alors $2^b - 1$ divise $2^a - 1$.
2. En déduire que si $2^a - 1$ est premier alors a est premier. Étudier la réciproque.