Équations différentielles linéaires

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 Équations linéaires d'ordre 1

1.1 Définition et solution générale

Définition 1. Soient $a, b : I \mapsto \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur I données.

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre** 1 une équation de la forme

$$(E) : y' + a(x)y = b(x), \qquad \text{où } y : I \mapsto \mathbb{K} \text{ est une fonction dérivable inconnue.}$$

On appelle **équation homogène associée** à (E) l'équation différentielle $(E_H) : y' + a(x)y = 0$.

Théorème 1. Soit l'équation homogène $(E_H) : y' + a(x)y = 0$, où $a : I \to \mathbb{K}$ est continue.

y est solution de (E_H) sur I ssi y est de la forme $y : x \mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)}$,

où $C \in \mathbb{K}$ est une constante et A une primitive de a sur I.

Exemple 1. Résoudre a) $y' + 2y = 0$ b) $y' + xy = 0$ c) $\cos(t)y' + 2\sin(t)y = 0$.

Propriété 1. Soit l'équation différentielle $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ et $(E_H) : y' + a(x)y = 0$.

Si elle existe, on note y_p une solution particulière de (E).

y est solution de (E) sur I ssi $y = y_p + y_H$, où y_H est une solution de (E_H) sur I.

Exemple 2. Résoudre a) $y' + 2y = 1$ b) $y' + xy = x^3 + 3x$ c) $\cos(t)y' + 2\sin(t)y = \frac{1}{2}\sin(2t)$.

1.2 Recherche d'une solution particulière

Propriété 2. Méthode de la variation de la constante (MVC)
Soit l'équation différentielle $(E) :\ y' + a(x)y = b(x)$.

(E) admet une solution particulière de la forme $y_p = C\mathrm{e}^{-A}$,

où $A : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de a sur I

et $C : I \to \mathbb{K}$ est une fonction dérivable sur I vérifiant $C' = b\mathrm{e}^{A}$.

Exemple 3. Résoudre $xy' + y = xe^x$.

Théorème 2. et définition Soit l'équation différentielle $(E): \ y' + a(x)y = b(x)$.

Si $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ alors il existe une unique solution y de (E) sur I vérifiant $y(x_0) = y_0$.

Ainsi le **problème de Cauchy** $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y' + a(x)y = b(x) \end{cases}$ admet une unique solution sur I.

Exemple 4. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y(1) = 2 \\ xy' + y = xe^x \end{cases}$.

Propriété 3. Principe de superposition Soient $b_1, b_2 : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues sur I.

Si y_1 est solution de $(E_1): \ y' + a(x)y = b_1(x)$ et y_2 de $(E_2): \ y' + a(x)y = b_2(x)$,

alors $y_1 + y_2$ est solution de $(E): \ y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

Exemple 5. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = \sin(t) + 3\cos(2t)$.

2 Équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2.1 Définition et solution générale

Définition 2. Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $f : I \mapsto \mathbb{K}$ une fonction continue sur I.

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre** 2 **à coefficients constants** une équation de la forme $(E) : y'' + ay' + by = f(x)$, où $y : I \mapsto \mathbb{K}$ est une fonction inconnue.

L'équation homogène associée à (E) est l'équation différentielle $(E_H) : y'' + ay' + by = 0$.

Exemple 6. Soit l'équation différentielle $(E_H) : y'' + 2y' + 2y = 0$ et $\phi : t \mapsto e^{-t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$.

1. Montrer que ϕ est une solution particulière de l'équation (E_H) sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que ϕ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa limite lorsque $t \to +\infty$.

Théorème 3. et définition Soit l'équation homogène $(E_H) : y'' + ay' + by = 0$, où $a, b \in \mathbb{C}$.

On appelle **équation caractéristique** de (E_H), l'équation $(E_c) : r^2 + ar + b = 0$, où $r \in \mathbb{C}$.

Notant Δ son discriminant, on a :

• si $\Delta \neq 0$, (E_c) admet deux racines complexes r_1 et r_2 et les solutions de (E_H)

sont les fonctions $y : x \mapsto C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ sont des constantes.

• si $\Delta = 0$, (E_c) admet une racine complexe double r_0 et les solutions de (E_H)

sont les fonctions $y : x \mapsto (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{r_0 x}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ sont des constantes.

Exemple 7. Résoudre dans $\mathbb{C}$: a) $y'' - 2\mathrm{i}y' - y = 0$ b) $y'' + \omega^2 y = 0$, où $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé.

Corollaire 1. Cas réel Soit l'équation homogène $(E_H) : y'' + ay' + by = 0$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

• si $\Delta > 0$, (E_c) admet deux racines réelles r_1 et r_2 et les solutions réelles de (E_H)

sont les fonctions $y : x \mapsto C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes réelles

• si $\Delta = 0$, (E_c) admet une racine réelle double r_0 et les solutions réelles de (E_H)

sont les fonctions $y : x \mapsto (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{r_0 x}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes réelles

• si $\Delta < 0$, (E_c) admet deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

et les solutions réelles de (E_H) sont les fonctions $y : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right)$,

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes réelles.

Exemple 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $y'' + 2y' + 2y = 0$ b) $y'' - \omega^2 y = 0$, où $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé.

Propriété 4. Soit l'équation différentielle (E) $y'' + ay' + by = f(x)$ et $(E_H) : y'' + ay' + by = 0$.

Si elle existe, on note y_p une solution particulière de (E).

y est solution de (E) sur I ssi $y = y_p + y_H$, où y_H est une solution de (E_H) sur I.

Exemple 9. Résoudre $y'' + 2y' + 2y = t$.

2.2 Recherche d'une solution particulière de $y'' + ay' + by = f(x)$

Cas où $f(x) = c\mathrm{e}^{\lambda x}$, avec $(a, b, c, \lambda) \in \mathbb{K}^4$:

On cherche une solution particulière sous la forme

• $y_p : x \mapsto \alpha \mathrm{e}^{\lambda x}$, si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique (E_c)

• $y_p : x \mapsto \alpha x \mathrm{e}^{\lambda x}$, si λ est racine simple de (E_c)

• $y_p : x \mapsto \alpha x^2 \mathrm{e}^{\lambda x}$, si λ est racine double de (E_c).

Exemple 10. Résoudre : a) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{2t}$ b) $y'' - 4\mathrm{i}y' - 4y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$

Cas où $f(x) = c\cos(\omega x)$ ou $f(x) = c\sin(\omega x)$, avec $(a,b,c,\omega) \in \mathbb{R}^4$:

On cherche une solution particulière sous la forme

• $y_p : x \mapsto \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$, si $\mathrm{i}\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique (E_c)

• $y_p : x \mapsto \alpha x\cos(\omega x) + \beta x\sin(\omega x)$, si $\mathrm{i}\omega$ est racine simple de (E_c).

Exemple 11. Résoudre : a) $y'' + 2y' + 2y = \cos(t)$; b) $y'' + \omega^2 y = \sin(\omega t)$, où $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.

Théorème 4. Soit (E) l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f(x)$.

Si $x_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$ alors le problème de Cauchy $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ y'' + ay' + by = f(x) \end{cases}$

admet une unique solution sur I.

Exemple 12. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y'' + 2y' + 2y = \cos(t) \end{cases}$.

Propriété 5. Principe de superposition Soient $f_1, f_2 : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues sur I.

Si y_1 est solution de (E_1) : $y'' + ay' + by = f_1(x)$ et y_2 de (E_2) : $y'' + ay' + by = f_2(x)$,

alors $y_1 + y_2$ est solution de (E) : $y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$.

Exemple 13. Résoudre $y'' + 2y' + 2y = t + \cos(t)$.