Équations différentielles linéaires

Exercice 1 Résoudre, suivant les valeurs du réel m, l'équation différentielle

$$y'' - (m+1)y' + my = \mathrm{e}^x$$

Exercice 2 Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x^2}$.

Indication On cherchera une solution particulière de la forme $y_p = zy_0$, où y_0 est une solution non nulle de l'équation homogène.

Exercice 3 **Circuit RLC** On considère l'équation différentielle $(E) : \dfrac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}q = \dfrac{E}{L}$,

où R, L, C et E sont des constantes réelles strictement positives données, t est la variable et q la fonction inconnue.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur R, L et C pour que l'équation caractéristique de (E) admette des racines réelles. Montrer que ces racines sont nécessairement négatives.
2. Dans cette question, on suppose que $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.
   (a) Montrer que les solution de (E) sont de la forme $q : t \mapsto K + A\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega t) + B\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t)$, où K, α et ω sont des réels à déterminer en fonction de E, R, L et C.
   (b) Étudier la limite de q lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 4 **Oscillateur amorti** On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 2ky' + \omega_0^2 y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \text{ où } (k, \omega_0, \omega) \in (\mathbb{R}_+^*)^3.$$

1. Vérifier que (E) possède une solution particulière $\varphi : t \mapsto a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, où $a \in \mathbb{C}$.
2. ω et k étant fixés, étudier les variations du module de a en fonction de ω_0.
3. Déterminer les solutions complexes de l'équation différentielle (E).

Exercice 5 Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, on considère l'équation différentielle $(E) :\ (x-1)y' - ny = x$.

1. Par intégration par parties, déterminer une primitive de $g : x \mapsto \dfrac{x}{(x-1)^{n+1}}$ sur $]1, +\infty[$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]1, +\infty[$.

Exercice 6 On considère l'équation différentielle $(F) : \ x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = \mathrm{e}^x$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $z(x) = x^2y(x)$.

1. Montrer que y est solution de (F) ssi z est solution de $(F') : \ z'' - z = \mathrm{e}^x$.
2. Résoudre (F'). En déduire les solutions de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 7

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{\sin(x)}\sin(x)\cos(x)$ à l'aide du changement de variable $t = \sin(x)$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + \cos(x)y = \sin(2x)$.

Exercice 8 Soit (E) l'équation différentielle $\left(1 + \sin^2(x)\right) y' + \sin(2x)y = \arctan(x)$.
On s'intéresse à l'ensemble $S_{(E)}$ de ses solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Écrire l'équation homogène (H) associée à (E) puis déterminer son ensemble de solutions $S_{(H)}$.
2. Par la méthode de variation de la constante, construire une solution particulière y_p de (E).
3. En déduire $S_{(E)}$.

Exercice 9 On considère, pour tout paramètre réel α, l'équation différentielle
$(E_\alpha) : y'' - 2\alpha \mathrm{y}' + \left(1 + \alpha^2\right) \mathrm{y} = \cos(\mathrm{x}) - \sin(\mathrm{x})$.

1. Écrire son équation homogène (H_α) puis résoudre son équation caractéristique associée (K_α) .
2. En déduire $S^{\mathbb{C}}_{(H_\alpha)}$ ensemble des solutions de (H_α) à valeurs complexes et $S^{\mathbb{R}}_{(H_\alpha)}$ ensemble des solutions de (H_α) à valeurs réelles.
3. Soit l'équation différentielle $\left(E^{\mathbb{C}}_\alpha\right) : y'' - 2\alpha y' + \left(1 + \alpha^2\right) y = e^{ix}$. Trouver, en discutant selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, une solution particulière $y^{\mathbb{C}}_{p,\alpha}$ de $\left(E^{\mathbb{C}}_\alpha\right)$.
4. En déduire, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, une solution particulière $y_{p,\alpha}$ de (E_α) puis décrire l'ensemble $S^{\mathbb{C}}_{(E_\alpha)}$ des solutions de (E_α) à valeurs complexes ainsi que l'ensemble $S^{\mathrm{R}}_{(E_\alpha)}$ des solutions de (E_α) à valeurs réelles.