Correction du devoir surveillé n° 2

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons (E_n) l'équation

$$(1-\mathrm{i}z)^n(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) = (1+\mathrm{i}z)^n(1+\mathrm{i}\sqrt{3})$$

1. si z est solution de (E_n) alors $(1-\mathrm{i}z)^n(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) = (1+\mathrm{i}z)^n(1+\mathrm{i}\sqrt{3})$.

   En prenant le conjugué des deux membres de cette égalité on obtient $\overline{(1-\mathrm{i}z)^n(1-\mathrm{i}\sqrt{3})} = \overline{(1+\mathrm{i}z)^n(1+\mathrm{i}\sqrt{3})}$. En utilisant les propriétés du conjugué, on a alors $(1+\mathrm{i}\overline{z})^n(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = (1-\mathrm{i}\overline{z})^n(1-\mathrm{i}\sqrt{3})$ ce qui implique que $\boxed{\overline{z} \text{ est solution de } (E_n).}$

2. Posons $Z = \dfrac{1-\mathrm{i}z}{1+\mathrm{i}z}$. z est solution de (E_n)

   $\Leftrightarrow (1-\mathrm{i}z)^n(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) = (1+\mathrm{i}z)^n(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) \Leftrightarrow \dfrac{(1-\mathrm{i}z)^n}{(1+\mathrm{i}z)^n} = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}, z \neq -\dfrac{1}{\mathrm{i}} = \mathrm{i} \Leftrightarrow$ $Z^n = \dfrac{2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}}{2\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}}} \Leftrightarrow \boxed{Z^n = e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}, z \neq \mathrm{i}.}$

3. $e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ a n racines n ièmes distinctes qui sont $\boxed{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3n}+\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]}$

4. $\dfrac{1-\mathrm{i}z}{1+\mathrm{i}z} = e^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow 1-\mathrm{i}z = (1+\mathrm{i}z)e^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow z\left(-\mathrm{i}-\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\right) = e^{\mathrm{i}\theta}-1 \Leftrightarrow z = \dfrac{e^{\mathrm{i}\theta}-1}{-\mathrm{i}\left(1+e^{\mathrm{i}\theta}\right)}$ pour $e^{\mathrm{i}\theta} \neq -1$ i.e $\theta \neq \pi\,[2\pi]$

   $$z = \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}\theta}-1}{1+e^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{i}\frac{2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

   Et pour $\theta = \pi\,[2\pi], 1-\mathrm{i}z = -1+\mathrm{i}z \Leftrightarrow 2 = \mathrm{i}z \Leftrightarrow z = \dfrac{2}{\mathrm{i}} = -2\mathrm{i}$

5. $(E_n) \Leftrightarrow Z^n = e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} \Leftrightarrow Z = e^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta = \dfrac{2\pi}{3n} + \dfrac{2k\pi}{n}, k \in [\![0, n-1]\!]$

   Et $\theta = \pi\,[2\pi] \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{3n} + \dfrac{2k\pi}{n} = \pi\,[2\pi] \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{1}{3}+k\right) = n\,[2n] \Leftrightarrow k = \dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{3}\,[n]$ ce qui est impossible avec $k \in k \in [\![0, n-1]\!]$

   Les solutions de (E_n) sont alors $\boxed{z = -\tan\left(\dfrac{\pi}{3n} + \dfrac{k\pi}{n}\right), k \in [\![0, n-1]\!]}$

Exercice 2 Soit φ la fonction de la variable complexe à valeurs complexes définie par

$$\varphi(z) = \frac{z-1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}-\overline{z}}$$

1. $1-\mathrm{i}-\overline{z} = \Leftrightarrow \overline{z} = -\mathrm{i} \Leftrightarrow z = 1++\mathrm{i}$ donc $\boxed{D_\varphi = \mathbb{C} \setminus \{1+\mathrm{i}\}}$

2. $|\varphi(z)|^2 = \varphi(z)\overline{\varphi(z)} = \dfrac{z-1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}-\overline{z}}\dfrac{\overline{z}-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}-z} = \dfrac{(z-1-\mathrm{i})(\overline{z}-1+\mathrm{i})}{-(\overline{z}-1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i}-z)} = 1$ pour tout $z \in\in D_\varphi$.

$\boxed{\varphi \text{ n'est alors pas surjective}}$ puisque tout nombre complexe de module différent de 1 ne peut avoir d'antécédent par φ.

3. $\varphi(z) = 1 \Leftrightarrow z - 1 - \mathrm{i} = 1 - \mathrm{i} - \bar{z} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 2 \Leftrightarrow z = 1 + \mathrm{i}y, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ car $z \neq 1 + \mathrm{i}$.

   $\boxed{\varphi \text{ n'est alors pas injective}}$ car 1 a une infinité d'antécédents.

4. $\varphi^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in D_\varphi ; \varphi(z) \in \mathbb{R}\}$.

   Or $|\varphi(z)| = 1$ pour tout $z \in D_\varphi$ donc $z \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \varphi(z) = 1$ ou $\varphi(z) = -1$.

   la première équation a été résolue à la question précédente, il reste à résoudre la seconde qui équivaut à $z - \bar{z} = 2\mathrm{i} \Leftrightarrow z = x + \mathrm{i}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ car $z \neq 1 + \mathrm{i}$

   $\boxed{\varphi^{-1}(\mathbb{R}) = \{z = x + \mathrm{i}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ ou } z = 1 + \mathrm{i}y, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\}}$

5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On évalue dans cette question $\varphi^{-1}\left(\{e^{\mathrm{i}\theta}\}\right)$.

   a) $\arg(\varphi(z)) = \arg(z - 1 - \mathrm{i}) - \arg(1 - \mathrm{i} - \bar{z})\ [2\pi]$

   $\underset{\arg(\bar{z}) = -\arg(z)}{=} \arg(z - 1 - \mathrm{i}) + \arg(1 + \mathrm{i} + z)\ [2\pi]$

   $\underset{\arg(-z) = \pi + \arg(z)}{=} \arg(z - 1 - \mathrm{i}) + \pi + \arg(-1 - \mathrm{i} + z)\ [2\pi] = 2\arg(z - 1 - \mathrm{i}) + \pi\ [2\pi]$.

   b) $\varphi(z) = e^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow \arg(z - 1 - \mathrm{i}) = \dfrac{\theta - \pi}{2}\ [\pi]$ car $|\varphi(z)| = 1$

   c) Soient A le point d'affixe $1 + \mathrm{i}$.

   L'ensemble des points d'affixes les antécédents par φ de $e^{\mathrm{i}\theta}$ est la droite passant par A formant un angle de $\dfrac{\theta - \pi}{2}$ avec l'horizontale, privée du point A.

   Pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, cet angle mesure $-\dfrac{\pi}{4}$.

6. D'après la question précédente, $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{\mathrm{i}\theta}$ a au moins un antécédent par φ donc,

   $\boxed{\text{pour que } \varphi : D_\varphi \to E \text{ soit surjective il suffit de choisir } E = \mathbb{U}}$

Exercice 3 On pose $P_{a,b,c}(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (P_{a,b,c}(k) - P_{a,b,c}(k-1)) = P_{a,b,c}(n) - P_{a,b,c}(0) = n^4 + an^3 + bn^2 + cn$ par télescopage, pour tout triplet de réels (a, b, c) et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. $P_{\alpha,\beta,\gamma}(x) - P_{\alpha,\beta,\gamma}(x-1) = 4x^3$

   $\Leftrightarrow x^4 - (x-1)^4 + \alpha[x^3 - (x-1)^3] + \beta[x^2 - (x-1)^2] + \gamma = 4x^3$

   Or $x^2 - (x-1)^2 = 2x - 1$

   $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ et $x^3 - (x-1)^3 = 3x^2 - 3x + 1$

   $(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ et $x^4 - (x-1)^4 = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$

   On identifie alors les coefficients afin que l'égalité soit vraie pour tout x et on obtient

   $-6 + 3\alpha = 0$ ce qui donne $\alpha = 2$ (coefficient de x^2)

   $4 - 3\alpha + 2\beta = 0$ ce qui donne $\beta = 1$ (coefficient de x)

   $-1 + \alpha - \beta + \gamma = 0$ ce qui donne $\gamma = 0$ (constante)

   D'où $\boxed{P_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = x^4 + 2x^3 + x^2}$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2)$ d'après la question précédente et la question 1.

   $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$

Exercice 4 Soit f la fonction de la variable réelle définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x) + \ln(x+1)$. On notera Γ_f son graphe.

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x \mapsto \ln x$ l'est et $x+1>0$ sur cet intervalle.

   $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} \text{ pour tout } x>0.}$

2. $f'(x)>0$ pour tout $x>0$ comme somme de deux termes strictement positifs.

   $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

3. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et d'après la question précédente $\mathrm{Im(f)} = \mathbb{R}$. De plus f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}_+^* \text{ à valeurs dans } \mathrm{Im(f)} = \mathbb{R}}$, d'après le théorème de la bijection.

4. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x(x+1)) = 0$ et $x>0 \Leftrightarrow x(x+1) = 1$ et $x>0 \Leftrightarrow x^2+x-1=0$ et $x>0$ Cette dernière équation admet deux solutions $x_0 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ avec $x_0>0$ et $x_1<0$ donc

   $\boxed{\text{l'unique solution de l'équation } f(x)=0 \text{ est } x_0 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

5. $f'(x_0) = \dfrac{1}{x_0} + \dfrac{1}{x_0+1}$ avec $x_0+1 = dfrac1+\sqrt{5}2$ donc

   $f'(x_0) = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} + \dfrac{2}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{2(\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1)}{4} = \sqrt{5}$

   Une équation cartésienne de la droite Δ_{x_0} est alors

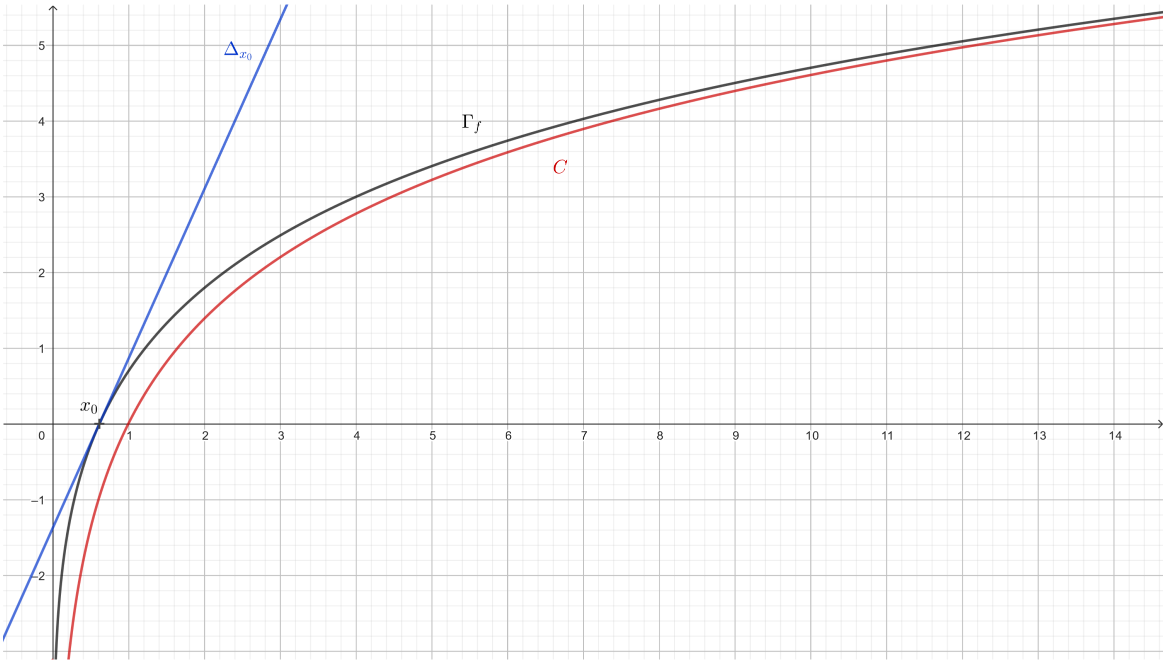
   $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) = \sqrt{5}\left(x - \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

   f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2} < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ donc f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ et la courbe Γ_f est en dessous de toutes ses tangentes sur $\mathbb{R}_+^*$.

   En particulier $\boxed{\Delta_{x_0} \text{ est toujours au-dessus de } \Gamma_f.}$

6. $f(x)-\ln\left(x^2\right) = \ln x - 2\ln x + \ln(x+1) = \ln(x+1) - \ln x = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}$ 0 car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

   Le graphe C d'équation $y = \ln\left(x^2\right)$ est alors asymptote à Γ_f en $+\infty$.



7. $\left(f^{-1}\right)'(0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ car f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

8. $y = f(x) \Leftrightarrow \ln(x(x+1)) = y$ et $x > 0 \Leftrightarrow x^2 + x - e^y = 0$et $x > 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{1+4e^y}}{2}$

   donc $\boxed{f^{-1}(y) = \dfrac{-1+\sqrt{1+4e^y}}{2} \text{ pour tout } y \in \operatorname{Im}(f)}$

   $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \dfrac{1}{f'\left(\dfrac{-1+\sqrt{1+4e^y}}{2}\right)}$ car f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$

   et on retrouve $\boxed{\left(f^{-1}\right)'(0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

On pose maintenant $g(x) = xf(x)$ pour tout $x \in D_f$.

9) $g(x) = x\ln x + x\ln\left(x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right) = 2x\ln x + x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

Or $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x\to+0} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 0$ par produit donc

$\boxed{\lambda = \lim\limits_{x\to+0} g(x) = 0}$

$\dfrac{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(0)}{x} = f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ donc la fonction $\boxed{\tilde{g} \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$