Devoir surveillé n° 2

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons (E_n) l'équation

$$(1-\mathrm{i}z)^n(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) = (1+\mathrm{i}z)^n(1+\mathrm{i}\sqrt{3})$$

1. Montrer que si z est solution de (E_n) il en est de même de son conjugué $\bar{z}$.
2. Posons $Z = \dfrac{1-\mathrm{i}z}{1+\mathrm{i}z}$. Expliquer pourquoi z est solution de (E_n) si et seulement si $Z^n = e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.
3. Combien y a-t-il de racines n-ième de $e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$? Expliciter les.
4. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, résoudre rigoureusement $\dfrac{1-\mathrm{i}z}{1+\mathrm{i}z} = e^{\mathrm{i}\theta}$.
5. En déduire toutes les solutions de (E_n).

Exercice 2 Soit φ la fonction de la variable complexe à valeurs complexes définie par

$$\varphi(z) = \frac{z-1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}-\bar{z}}$$

1. Préciser son ensemble de définition D_φ.
2. Montrer que $\varphi(z)$ est de module 1 pour tout $z \in D_\varphi$.φ est-elle surjective ?
3. Résoudre $\varphi(z) = 1$.φ est-elle injective ?
4. Déterminer $\varphi^{-1}(\mathbb{R})$.
5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On évalue dans cette question $\varphi^{-1}\left(\left\{e^{i\theta}\right\}\right)$.
   a) Montrer que $\arg(\varphi(z)) \equiv 2\arg(z-1-\mathrm{i}) + \pi[2\pi]$.
   b) Quelle condition nécessaire et suffisante doit satisfaire $\arg(z-1-\mathrm{i})$ pour que $\varphi(z) = e^{\mathrm{i}\theta}$?
   c) Décrire géométriquement l'ensemble des points d'affixes les antécédents par φ de $e^{\mathrm{i}\theta}$. Représenter cet ensemble sur le plan complexe pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.
6. Par quel ensemble E doit-on remplacer $\mathbb{C}$ pour que $\varphi : D_\varphi \to E$ soit surjective ?

Exercice 3 On pose $P_{a,b,c}(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$.

1. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (P_{a,b,c}(k) - P_{a,b,c}(k-1))$ pour tout triplet de réels (a, b, c).
2. Trouver $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $P_{\alpha,\beta,\gamma}(x) - P_{\alpha,\beta,\gamma}(x-1) = 4x^3$ pour tout réel x.
3. En déduire une formule pour la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$. Quelle est sa forme factorisée ?

Exercice 4 Soit f la fonction de la variable réelle définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x) + \ln(x+1)$. On notera Γ_f son graphe.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
2. Après avoir déterminé ses limites en 0 et $+\infty$, construire son tableau de variations .

3. Déterminer son image Im(f) et expliquer pourquoi f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans Im(f).
4. Résoudre $f(x) = 0$. On notera x_0 son unique solution.
5. Évaluer $f'(x_0)$ puis donner une équation cartésienne de la droite Δ_{x_0} tangente à Γ_f et passant par le point P_0 d'abscisse x_0. Montrer que Δ_{x_0} est toujours au-dessus de Γ_f.
6. Prouver que $f(x) - \ln\left(x^2\right)$ tend vers 0 en $+\infty$, autrement dit que le graphe C d'équation $y = \ln\left(x^2\right)$ est asymptote à Γ_f en $+\infty$. Tracer l'allure de Γ_f en représentant dans votre graphique P_0, le graphe du logarithme népérien, C et Δ_{x_0}.
7. Déduire de 5) $\left(f^{-1}\right)'(0)$.
8. Expliciter $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$ et vérifier ainsi votre résultat du 7).

On pose maintenant $g(x) = xf(x)$ pour tout $x \in D_f$.

9) Évaluer la limite λ de $g(x)$ lorsque x tend vers 0^+. Notons $\tilde{g} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ le prolongement de g défini par $\tilde{g}(x) = g(x)$ si $x \neq 0$ et $\tilde{g}(0) = \lambda$. Est-il dérivable en 0 ? (On justifiera sa réponse).