Devoir maison n° 8

A rendre le jeudi 28 novembre 2024

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t^2+1}} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 t^n \sqrt{t^2+1} \mathrm{d}t$$

1. Calculer la dérivée de la fonction $g : t \mapsto \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$.
2. En déduire I_0.
3. Calculer I_1.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, $I_{n+2} + I_n = J_n$.
5. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1)J_n$$

6. Déduire des questions précédentes une expression de I_{n+2} en fonction de I_n, puis calculer I_2 et I_3.

Exercice 2 Soit (E) l'équation différentielle

$$\left(1 + \sin^2(x)\right) y' + \sin(2x) y = \arctan(x)$$

On s'intéresse à l'ensemble $S_{(E)}$ de ses solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

0. Rappeler la formule de duplication du sinus.
1. Écrire l'équation homogène (H) associée à (E) puis déterminer son ensemble de solutions $S_{(H)}$.
2. Par la méthode de variation de la constante, construire une solution particulière y_p de (E). (On pourra penser à une intégration par parties.)
3. En déduire $S_{(E)}$.