Correction du devoir maison n° 8

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t^2+1}}dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 t^n\sqrt{t^2+1}\text{d}t$$

1. $g : t \mapsto \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$. g est dérivable pour tout t tel que $t+\sqrt{t^2+1} > 0$

   Or $t+\sqrt{t^2+1} > 0$ pour tout $t \geqslant 0$ et

   $t+\sqrt{t^2+1} = t+|t|\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}} = t\left(1-\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}\right)$ si $t<0$ avec $\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}} > 1$ pour tout t

   donc $1-\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}} < 0$ pour tout t et $t+\sqrt{t^2+1} > 0$ comme produit de 2 facteurs

   strictement négatifs pour tout $t > 0$.

   g est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(t) = \dfrac{1+\dfrac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}} = \dfrac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}(t+\sqrt{t^2+1})} = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$

2. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\text{d}t = \int_0^1 g'(t)\text{d}t = [g(t)]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})$

3. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\text{d}t = \left[\sqrt{t^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1.$

4. Pour tout entier naturel n, $I_{n+2}+I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+2}+t^n}{\sqrt{t^2+1}}\text{d}t$ par linéarité.

   Or $\dfrac{t^{n+2}+t^n}{\sqrt{t^2+1}} = \dfrac{t^n(t^2+1)}{\sqrt{t^2+1}} = t^n\sqrt{t^2+1}$ pour tout t

   Donc $\boxed{I_{n+2}+I_n = J_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{t^2+1}}\text{d}t = \left[t^{n+1}\sqrt{t^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n\sqrt{t^2+1} = \sqrt{2}-(n+1)J_n$ par intégration par parties

   en posant $u = t^{n+1}$ et $v' = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ $u' = (n+1)t^n$ et $v = \sqrt{t^2+1}$, u et v étant c^1 sur $\mathbb{R}$

6. d'après la question précédente, $J_n = \dfrac{\sqrt{2}-I_{n+2}}{n+1}$

   Or $I_{n+2}+I_n = J_n$ ce qui donne $I_{n+2} = J_n - I_n = \dfrac{\sqrt{2}-I_{n+2}}{n+1} - I_n$

   donc $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)I_{n+2} = \dfrac{\sqrt{2}}{n+1} - I_n$ puis

   $\dfrac{n+2}{n+1}I_{n+2} = \dfrac{\sqrt{2}}{n+1} - I_n$ d'où $\boxed{I_{n+2} = \dfrac{\sqrt{2}}{n+2} - \dfrac{n+1}{n+2}I_n}$

   $I_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}I_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$ et $I_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{3} - \dfrac{2}{3}I_1 == \dfrac{\sqrt{2}}{3} - \dfrac{2}{3}(\sqrt{2}-1).$

Exercice 2 Soit (E) $\left(1+\sin^2(x)\right)y' + \sin(2x)y = \arctan(x)$.

1. $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$

2. $(H) : \left(1+\sin^2(x)\right)y' + \sin(2x)y = 0 \Leftrightarrow y' + \dfrac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}y = 0$ car $1+\sin^2(x) \neq 0\,\forall x \in \mathbb{R}$

   $a(x) = \dfrac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

   Donc a admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et $A(x) = \displaystyle\int a(x)\mathrm{d}x = \ln(1+\sin^2 x)$ car $\left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x\cos x$ et $y_H(x) = C\mathrm{e}^{-\ln(1+\sin^2 x)} = \dfrac{C}{1+\sin^2 x}$

$$\boxed{S_{(H)} = \{x \mapsto \frac{C}{1+\sin^2 x}, C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\}}$$

3. On pose $y_p(x) = \dfrac{C(x)}{1+\sin^2 x}$ et on a alors $C'(x) = \arctan x$

   $C(x) = \displaystyle\int \arctan x = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

   par intégration par parties, en posant $u' = 1, u = x, v = \arctan x, v' = \dfrac{1}{1+x^2}$ u et v étant c^1 sur $\mathbb{R}$ d'où

$$\boxed{y_p(x) = \frac{x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{1+\sin^2 x}}$$

$$\boxed{S_{(E)} = \{x \mapsto \frac{C + x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{1+\sin^2 x}, C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\}}$$