Correction du Test n° 8

Sujet A

1. $y'' - y' - 2y = 3e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$, $g(0) = 2$ et $g'(0) = 0$.

   L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, qui a pour solutions -1 et 2.

   Donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme :

   $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

   $\lambda = -1$ est une des solutions de l'équation homogène, donc on cherche une solution particulière sous la forme $u(x) = kxe^{-x}$.

   On a $u'(x) = -kxe^{-x} + ke^{-x} = k(1-x)e^{-x}$ et $u''(x) = -ke^{-x} - k(1-x)e^{-x}$, donc pour que $u''(x) - u'(x) - 2u(x) = e^{-x}$, il faut choisir $k = -1$.

   Donc $u(x) = -xe^{-x}$ et $g(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} - xe^{-x}$.

   On a $g'(x) = -Ae^{-x} + 2Be^{2x} - e^{-x} + xe^{-x}$. Ainsi $g(0) = A + B = 2$ et $g'(0) = -A + 2B - 1 = 0$.

   On trouve $A = 1$ et $B = 1$, donc $g(x) = e^{-x} + e^{2x} - xe^{-x}$.

2. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}\mathrm{d}x = \frac{e^x(\cos x + \mathrm{i}\sin x)(1-2\mathrm{i})}{5}$.

3. $\displaystyle\int e^x \cos(2x)\mathrm{d}x = \frac{e^x}{5}(\cos x + 2\sin x) + C$.

Correction du Test n° 8

Sujet B

1. $y'' + 3y' + 2y = 2e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$, $g(0) = 2$ et $g'(0) = 0$.

   L'équation caractéristique est $r^2 + 3r + 2 = 0$, qui a pour solutions -1 et -2.

   Donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme :

   $y(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x}$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

   $\lambda = -2$ est une des solutions de l'équation homogène, donc on cherche une solution particulière sous la forme $u(x) = kxe^{-2x}$.

   On a $u'(x) = -2kxe^{-2x} + ke^{-2x}$ et $u''(x) = 4kxe^{-2x} - 4ke^{-2x}$,

   donc pour que $u''(x) + 3u'(x) + 2u(x) = 2e^{-2x}$, il faut choisir $k = -2$.

Donc $u(x) = -2xe^{-2x}$ et $g(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x} - 2xe^{-2x}$.

On a $g'(x) = -Ae^{-x} - 2Be^{-2x} - 2e^{-2x} + 4xe^{-2x}$. Ainsi $g(0) = A + B = 2$ et

$g'(0) = -A - 2B - 2 = 0$.

On trouve $A = 6$ et $B = -4$, donc $g(x) = 6e^{-x} - 4e^{-2x} - 2xe^{-2x}$.

2. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x}\mathrm{d}x = \frac{e^{2x}(\cos x + \mathrm{i}\sin x)(2-\mathrm{i})}{5}$.
3. $\displaystyle\int e^{2x}\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{e^{2x}}{5}(2\cos x + \sin x) + C$.