Suites numériques

Exercice 1 Étudier la monotonie de la suite (u_n) de terme général $u_n = \binom{2n}{n}$.

Exercice 2 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie, à valeurs dans $]1; 2]$ et monotone.
2. On pose $v_n = (u_n - 1)^{-1}$
 - (a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.
 - (b) En déduire le terme général et la limite de (u_n) .

Exercice 3 On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1 - v_n^2$ ainsi que les fonction $f : x \mapsto 1 - x^2$ et $g = f \circ f$.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1]$.
2. Dresser le tableau de variation de g sur $[0; 1]$.
3. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{2n+2} = g(v_{2n})$.
En déduire que la suite (v_{2n}) est décroissante et convergente.
4. Étudier, de même, la monotonie et la convergence de la suite (v_{2n+1}) .
5. Déduire de ce qui précède que la suite (v_n) n'est ni monotone, ni convergente.

Exercice 4 Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Déterminer, suivant la valeur de θ , le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 2 \cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0$.

Exercice 5 Étudier la monotonie et la convergence de la suite (u_n) définie par :

1. $u_0 \in]1, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{\ln(u_n)}$
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 6u_n}{3u_n^2 + 2}$

Exercice 6 Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 3v_n}{8} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
2. Écrire une fonction Python d'argument n retournant une valeur approchée de ℓ à 10^{-n} près.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = 4u_n + 3v_n$. Montrer que (t_n) est constante.
4. Que peut-on en déduire ?

Exercice 7

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $x^5 + nx - 1 = 0$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que (x_n) est décroissante, convergente et déterminer sa limite.

Exercice 8

1. Soit $\psi(x) = \operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{sh}(x) + 1$. Montrer que $\psi(x) > 0$ pour tout réel x .
2. On considère maintenant la fonction $h :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = e^{\operatorname{sh}(x)} - x - 1$. Calculer $h'(x)$ et $h''(x)$. Observer que $h''(x) = \psi(x)e^{\operatorname{sh}(x)}$.
3. En déduire les tableaux de variations et de signes de h' puis de h .
4. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$ on a $1 + x \leq e^{\operatorname{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}$
5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déduire du 4) que, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, alors

$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq \sum_{k=n}^{pn} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leq \ln\left(\frac{np}{n-1}\right)$$

1. Posons $S_n = \sum_{k=n}^{pn} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$. Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 2}$.