

## Devoir maison n° 9

A rendre le jeudi 12 décembre 2024

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - u_n^2$ .

1. Calculer les termes  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .

Quelle(s) conjecture(s) peut-on faire sur le comportement de la suite  $(u_n)$  ?

2. Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]$ .

3. Soient les fonction  $f : x \mapsto 1 - x^2$  et  $g = f \circ f$ .

Étudier les variations de  $g$  sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

4. Vérifier que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} = g(u_{2n})$ .

En déduire que la suite  $(u_{2n})$  est monotone et converge.

5. Démontrer de même que la suite  $(u_{2n+1})$  est monotone et converge.

6. Les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent-elles vers la même limite ?

Que peut en déduire concernant la suite  $(u_n)$  ?