Calcul matriciel et systèmes linéaires

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. (a) Exprimer $(J_2)^2$ en fonction de J_2.
   (b) En déduire la matrice $(J_2)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. Reprendre les questions précédentes dans le cas où $n \in \mathbb{N}^*$ est quelconque.

Exercice 2 Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ v_0 & = & \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 2u_n + v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + 2v_n \end{array}\right.$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $X_n = A^n X_0$, où $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est à préciser.

2. En déduire l'expression du terme général de chacune des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 3 Soient $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. En déduire M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer les matrices qui commutent avec N.

Exercice 4 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer A^2.
   (b) Trouver deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = aA + bI_3$.
   (c) En déduire que A est inversible et expliciter son inverse.
2. (a) Trouver une matrice J telle que $A = I_3 + J$.
   (b) Calculer J^2.
   (c) Montrer par récurrence que $J^k = 3^{k-1}J$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (d) Donner une expression simplifiée de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire que $A^n = \dfrac{1}{3}\left(4^n - 1\right) J + I_3$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Cette formule est-elle également valable pour $n = -1$?

Exercice 5 Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère le système

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & my & + & z & = & 2 \\ mx & + & y & - & z & = & 1-m \\ mx & - & m^2y & + & z & = & 2 \\ x & - & my & + & z & = & m^2+1 \end{array}\right., \text{ d'inconnues } x, y, z.$$

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles le système (S) est incompatible.
2. Pour chaque valeur de m pour laquelle (S) est compatible, déterminer l'ensemble de ses solutions.

Exercice 6 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le but de cet exercice est de calculer A^n de trois façons différentes.

1. (a) Établir l'égalité $U^k = U$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Cette relation est-elle vraie pour $k = 0$?
   (b) Développer le produit $(I_3 + U)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire que A^n peut s'exprimer sous la forme $I_3 + \lambda_n U$ où λ_n est un nombre réel à calculer.
2. (a) Exprimer A^2 en fonction de A et I_3.
   (b) En déduire que A est inversible puis expliciter A^{-1}.
   (c) Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.
   (d) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$. En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (e) Retrouver ainsi l'expression des coefficients de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Est-elle valable pour $n = -1$?
3. (a) Calculer P^2. En déduire l'inversibilité de P ainsi que P^{-1}.
   (b) Expliciter les coefficients du produit PDP^{-1}. Que remarque-t-on ?
   (c) Retrouver ainsi que A est inversible puis exprimer A^{-1} en fonction de P et D^{-1}.
   (d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire les coefficients de A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.