

Correction du devoir surveillé n° 3

Exercice 1

1. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\sqrt{1-x^2} \leq x$?

$\sqrt{1-x^2}$ existe ssi $x \in [-1, 1]$ et l'inégalité n'est pas vérifiée si $x \leq 0$.

On se restreint donc à $x \in [0, 1]$, et, puisque tout est positif, on a

$$\sqrt{1-x^2} \leq x \Leftrightarrow 1-x^2 \leq x^2 \Leftrightarrow 1 \leq 2x^2 \Leftrightarrow x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'inégalité est donc vérifiée si et seulement si $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$

2. $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2} e^{\arcsin(x)}$

La fonction arcsinus est définie sur $[-1, 1]$, et pour ces valeurs de x , $\sqrt{1-x^2}$ est également bien définie. Le domaine de définition de f est donc $[-1, 1]$.

De plus, f est dérivable sur $] -1, 1[$ car la fonction arcsinus est dérivable sur $] -1, 1[$, et la fonction racine n'est pas dérivable en 0.

$$f'(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' e^{\arcsin(x)} + \sqrt{1-x^2} \left(e^{\arcsin(x)}\right)'$$

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(e^{\arcsin(x)}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin(x)}$$

$$\text{donc } f'(x) = \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right) e^{\arcsin(x)} = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) e^{\arcsin(x)}$$

$e^{\arcsin(x)} > 0$ sur $] -1, 1[$ donc f' est du signe de $1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $] -1, 1[$

Or $1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{1-x^2}$ car $\sqrt{1-x^2} > 0$ pour tout $x \in] -1, 1[$

La question précédente nous donne le signe de la dérivée, et on en déduit le tableau de variations de f

x	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}$	0

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{1-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}$$

Exercice 2

1. Soit $m \in \mathbb{R}$

$$(S) \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \\ x + y + z = m \end{cases}, \text{ de paramètre } m \text{ et d'inconnues } x, y \text{ et } z.$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = m & L_1 \leftrightarrow L_4 \\ (m-1)y = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ (m-1)z = 1-m & L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ (1-m)y + (1-m)z = 1-m^2 & L_4 \leftarrow L_1 - mL_4 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = m \\ (m-1)y = 0 \\ (m-1)z = 1-m \\ 0 = 2-m-m^2 & L_4 \leftarrow L_4 + L_3 + L_2 \end{cases}$$

On en déduit que (S) est compatible ssi $2-m-m^2=0 \Leftrightarrow m=1$ ou $m=-2$ (S) est incompatible ssi $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.2. Si $m = -2$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = -2 \\ -3y = 0 \\ -3z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}.$$

Dans ce cas, le système (S) admet une unique solution et $S = \{(-1, 0, -1)\}$.Si $m = 1$ $(S) \Leftrightarrow x + y + z = 1$. Dans ce cas, le système (S) admet une infinité de solutions et $S = \{(1-y-z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 3

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (E) \Leftrightarrow (E') : y' + \frac{1}{x}y = e^x$.La solution générale de l'équation homogène $(E'_H) : y' + \frac{1}{x}y = 0$ s'écrit

$$y_H(x) = Ce^{-\ln(x)} = \frac{C}{x}, \text{ où } C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Par variation de la constante, on cherche une solution particulière de (E') de la forme

$$y_p(x) = \frac{z(x)}{x}, \text{ où } z \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*. \text{ Dans ce cas, on a } \forall x \in \mathbb{R}_+^* :$$

$$y_p'(x) + \frac{1}{x}y_p(x) = e^x \Leftrightarrow \frac{xz'(x) - z(x)}{x^2} + \frac{z(x)}{x^2} = e^x \Leftrightarrow \frac{z'(x)}{x} = e^x \Leftrightarrow z'(x) = xe^x.$$

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$ étant c^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, par I.P.P. on peut choisir :

$$z(x) = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x \text{ et } y_p(x) = e^x - \frac{e^x}{x}.$$

Finalement, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ s'écrit

$$y(x) = y_p(x) + y_H(x) = e^x - \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

2. (a) L'équation caractéristique $r^2 + 2r + 2 = 0$, de discriminant $\Delta = -4 < 0$, admet deux racines complexes conjuguées : $r_1 = -1 - i$ et $r_2 = -1 + i$.

La solution générale de l'équation homogène $z'' + 2z' + 2z = 0$ s'écrit donc

$$z_H(x) = e^{-x} (A \cos(x) + B \sin(x)), \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Comme l'équation différentielle $z'' + 2z' + 2z = -1$ admet pour solution particulière $z_P(x) = -1/2$, la solution générale de cette dernière s'écrit

$$z(x) = z_P(x) + z_H(x) = -\frac{1}{2} + e^{-x} (A \cos(x) + B \sin(x)), \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

$$(b) \int e^{-x} \cos(x) dx = \operatorname{Re} \left(\int e^{(-1+i)x} dx \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i} + C \right), \text{ avec } C \in \mathbb{C}.$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i} = \frac{e^{-x}(\cos(x) + i \sin(x))(-1-i)}{2}$. Les primitives de φ sur $\mathbb{R}$ sont donc

$$\text{définies par } \int \varphi(x) dx = \frac{e^{-x}(-\cos(x) + \sin(x))}{2} + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

- (c) Si y est solution de $y''' + 2y'' + 2y' = -1$ alors y est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, y'''(x) + 2y''(x) + 2y'(x) = -1$. Dans ce cas, $z = y'$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, z''(x) + 2z'(x) + 2z(x) = y'''(x) + 2y''(x) + 2y'(x) = -1$.

Réciproquement, si y est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z = y'$ est solution de $z'' + 2z' + 2z = -1$ alors y est solution de $y''' + 2y'' + 2y' = -1$. Soit y trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors on a :

$$\begin{cases} y''' + 2y'' + 2y' = -1 \\ y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}, y''(0) = -1 \\ z'' + 2z' + 2z = -1 \\ z(0) = \frac{1}{2}, z'(0) = -1 \end{cases} \quad \text{ssi } y(0) = 1 \text{ et } z = y' \text{ vérifie}$$

Cherchons $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\begin{cases} z(0) = \frac{1}{2} \\ z'(0) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{2} + A = \frac{1}{2} \\ B - A = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y''' + 2y'' + 2y' = -1 \\ y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}, y''(0) = -1 \end{cases} \quad \text{ssi } y(0) = 1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},$$

$$y'(x) = -\frac{1}{2} + e^{-x} \cos(x).$$

D'après la question 3., $\begin{cases} y''' + 2y'' + 2y' = -1 \\ y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}, y''(0) = -1 \end{cases} \quad \text{ssi } y(0) = 1 \text{ et}$

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = -\frac{x}{2} + \frac{e^{-x}(-\cos(x) + \sin(x))}{2} + C.$$

Dans ce cas, $y(0) = 1 \iff -\frac{1}{2} + C = 1 \iff C = \frac{3}{2}.$

On en déduit que le problème de Cauchy $\begin{cases} y''' + 2y'' + 2y' = -1 \\ y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}, y''(0) = -1 \end{cases}$ admet une unique solution, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = -\frac{x}{2} + \frac{e^{-x}(-\cos(x) + \sin(x))}{2} + \frac{3}{2}.$$

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x^2 \neq 0$, donc la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{(1 + x^2)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction qui l'est et qui ne s'annule pas.

D'après le théorème fondamental du calcul intégral, f_n admet une unique primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0, et celle-ci est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1 + t^2)^n} dt.$$

2. $F_1(x) = \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt = [\arctan(t)]_0^x$. Donc $F_1(x) = \arctan(x)$.

3. On pose $t = \tan(u)$. La fonction tangente est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

De plus, $0 = \tan(0)$, $1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $dt = (1 + \tan^2(u))du$.

Par la formule de changement de variable, on a :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(1 + t^2)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2(u)}{(1 + \tan^2(u))^2} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2(u)} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(u) du.$$

Donc $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos(2u)}{2} du = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$. Donc $I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On pose $u(t) = t$ et $v(t) = (1 + t^2)^{-n}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = 1$ et $v'(t) = -2nt(1 + t^2)^{-n-1}$.

Donc, par intégration par parties et par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_0^x \frac{1}{(1 + t^2)^n} dt = \left[\frac{t}{(1 + t^2)^n} \right]_0^x + 2n \int_0^x \frac{t^2}{(1 + t^2)^{n+1}} dt.$$

$$\text{Donc } \boxed{\int_0^x \frac{1}{(1 + t^2)^n} dt = \frac{x}{(1 + x^2)^n} + 2n \int_0^x \frac{t^2}{(1 + t^2)^{n+1}} dt \quad (1)}.$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a :

$$\int_0^x \frac{t^2}{(1 + t^2)^{n+1}} dt = \int_0^x \frac{1 + t^2 - 1}{(1 + t^2)^{n+1}} dt \stackrel{\text{linéarité}}{=} \int_0^x \frac{1}{(1 + t^2)^n} dt - \int_0^x \frac{1}{(1 + t^2)^{n+1}} dt \quad (2).$$

Par (1) et (2), on a : $F_n(x) = \frac{x}{(1 + x^2)^n} + 2nF_n(x) - 2nF_{n+1}(x)$.

$$\text{Finalement } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2nF_{n+1}(x) = (2n - 1)F_n(x) + \frac{x}{(1 + x^2)^n}}.$$

6. Si $n = 1$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R} : 2F_2(x) = F_1(x) + \frac{x}{1 + x^2} = \arctan(x) + \frac{x}{1 + x^2}$.

$$\text{Donc } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_2(x) = \frac{1}{2} \left(\arctan(x) + \frac{x}{1 + x^2} \right)}.$$

On retrouve ainsi que $I = F_2(1) = \frac{1}{2} \left(\arctan(1) + \frac{1}{1 + 1^2} \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$, car $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.