Samedi 7 décembre 2024

Devoir surveillé n° 3

Ce devoir est constitué d'exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque.
La qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, la présentation et l'orthographe font partie des critères de notation. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés.
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 **3 points** : **1.** 1 **2.** 2

1. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\sqrt{1-x^2} \leqslant x$?

2. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{e}^{\arcsin(x)}$ et dresser son tableau de variation.

Exercice 2 **3 points** : **1.** 2 **2.** 1

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & m \\ x & + & y & + & mz & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & m \end{array}\right., \quad \text{de paramètre } m \text{ et d'inconnues } x,\ y \text{ et } z.$$

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles le système (S) est incompatible.

2. Dans le cas où (S) est compatible, déterminer l'ensemble de ses solutions.

Exercice 3 **7 points** : **1.** 2 **2.(a)** 2 **2.(b)** 1 **2.(c)** 2

Les questions 1. **et** 2. **sont indépendantes.**

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E) : $xy' + y = xe^x$.

2. On rappelle qu'une fonction réelle f est dérivable trois fois sur un intervalle I lorsqu'elle est dérivable sur I, que sa dérivée f' est dérivable sur I, et que la dérivée f'' de f' est dérivable sur I. Dans ce cas, la dérivée de f'' sera notée f''' et appelée dérivée troisième de f.

   (a) Résoudre l'équation différentielle $z'' + 2z' + 2z = -1$, d'inconnue $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   (b) Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$.

   (c) Montrer que le problème de Cauchy $\begin{cases} y''' + 2y'' + 2y' = -1 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = \dfrac{1}{2},\ y''(0) = -1 \end{cases}$ admet une unique solution, que l'on déterminera.

Exercice 4 **7 points** : **1.** 0.5 **2.** 0.5 **3.** 2.5 **4.** 1.5 **5.** 1 **6.** 1

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on pose } \forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$$

1. Montrer que la fonction F_n est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Calculer $F_1(x)$.

3. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $t = \tan(u)$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t$$

5. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ 2nF_{n+1}(x) = (2n-1)F_n(x) + \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$

6. Expliciter alors $F_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Vérifier que l'on retrouve ainsi le résultat de la question 3.