

Devoir maison n° 10

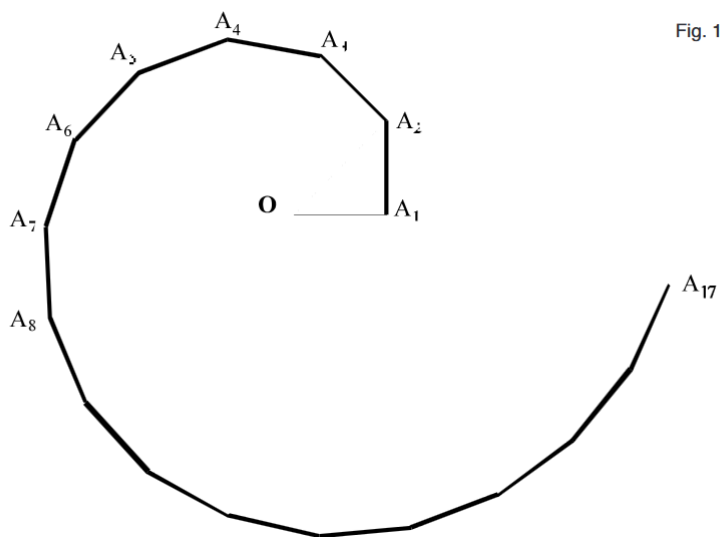
À rendre le jeudi 20 décembre 2024

Exercice 1 Spirale de Théodore (Théodore de Cyrène fin Ve - déb. IVe siècle av J.C.)

La plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

La spirale de Théodore est une spirale discrète, constituée de points $A_n, n \in \mathbb{N}^*$ tels que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n , et $OA_1 = A_nA_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. C'est sans doute l'une des plus anciennes spirales connue en mathématique.

On note z_n l'affixe du point A_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $z_1 = 1$.



- 1.
2. Le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n donc $\arg\left(\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi]$, donc il existe

$$a \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } \frac{z_{n+1} - z_n}{z_n} = ia \Leftrightarrow z_{n+1} - z_n = ia z_n$$

Ici, les triangles étant rectangles de sens direct, on a $a > 0$.

De plus, $OA_1 = 1 = A_nA_{n+1}$ donc $|z_{n+1} - z_n| = 1 \Leftrightarrow |aiz_n| = 1 \Leftrightarrow |a| = \frac{1}{|z_n|}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On obtient alors $z_{n+1} - z_n = ia z_n = i \frac{z_n}{|z_n|}$ donc $z_{n+1} = z_n + i \frac{z_n}{|z_n|}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On considère donc la suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $z_1 = 1$ et $z_{n+1} = z_n + i \frac{z_n}{|z_n|}$

Montrons que $|z_n| = \sqrt{n}$ et $\arg(z_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) [\pi]$ pour tout $n \geq 2$, par récurrence :

I : Pour $n = 2$, $|z_2| = \sqrt{2}$ d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle isocèle OA_1A_2 et $\arg(z_2) = \frac{\pi}{4} [2\pi] = \arctan(1) [\pi]$

H : Supposons que $|z_n| = \sqrt{n}$ et $\arg(z_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) [\pi]$ à un rang $n \geq 2$

On a alors $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + |z_{n+1} - z_n|^2$ d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OA_nA_{n+1} donc $|z_{n+1}|^2 = n + 1$ puis $|z_{n+1}| = \sqrt{n+1}$

De plus, on sait que $z_{n+1} = z_n + i \frac{z_n}{|z_n|} = z_n \left(1 + i \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc

$$\arg(z_{n+1}) = \arg(z_n) + \arg\left(1 + i \frac{1}{\sqrt{n}}\right) [2\pi]$$

$$\arg(z_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n-1} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \arg\left(1 + i \frac{1}{\sqrt{n}}\right) [\pi] \text{ d'après l'hypothèse de récurrence.}$$

Si on note θ_n un argument de $1 + i \frac{1}{\sqrt{n}}$, on a $\cos(\theta_n) = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}$ et

$$\sin(\theta_n) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}(n+1)} \text{ donc } \tan(\theta_n) = \frac{\sin(\theta_n)}{\cos(\theta_n)} = \frac{\frac{n}{\sqrt{n}(n+1)}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ donc}$$

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) [\pi] \text{ ce qui conclut l'hérédité.}$$

2.4. Pour le plaisir : généralisons !

Pour construire la spirale de Théodore, nous avons pris une succession de triangles rectangles dont l'un des côtés mesure 1 unité (en langage des nombres complexes, ceci correspond à la

transformation $z \rightarrow z + \frac{iz}{z}$. Généralisons en

prenant, non plus un angle droit, mais un angle quelconque et le côté A_nA_{n+1} quelconque (Soit

une transformation de la forme $z \rightarrow z + b \frac{z}{|z|}$

où b est un nombre complexe quelconque). Généralisons encore d'avantage par la transformation

$z \rightarrow az + b \frac{z}{|z|}$ où a et b sont deux nombres

complexes quelconques. Le lecteur inspiré pourra encore généraliser en prenant par exemple a et b dépendant de n . Les résultats sont parfois spectaculaires. La figure 4 et la figure 5 ci-contre ont été obtenues en prenant : $a = \exp(i\pi/4)$, $b = \exp(-i\pi/4)$ (nombre de points : 300) et $a = 1$, $b = 0,5 \cdot \exp(in/2)$ (nombre de points : 500).

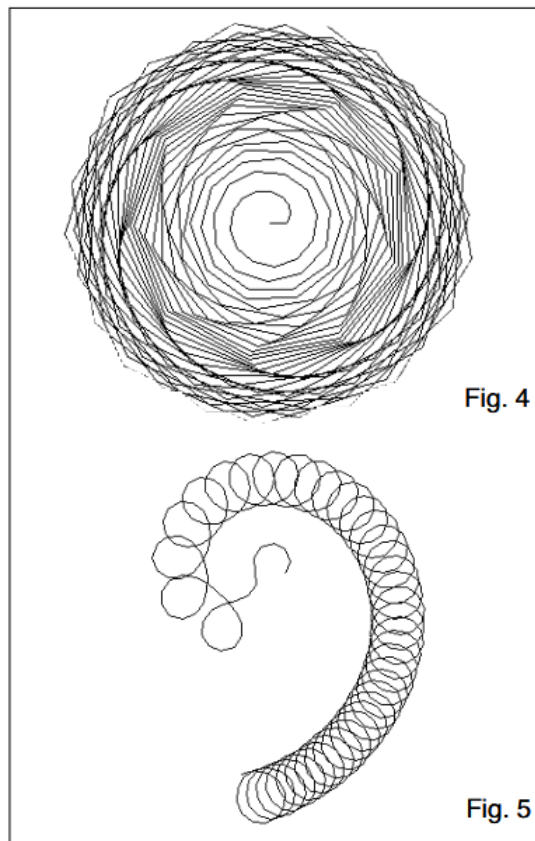


Fig. 4

Fig. 5

Exercice 2

1. (a) La hauteur h_n du triangle OA_nB_n est $h_n = OB_n \sin \theta_n = \boxed{r_n \sin \theta_n}$.

L'aire de ce triangle est alors : $\mathcal{A}_n = \frac{r_n \times h_n}{2} = \frac{r_n^2 \sin \theta_n}{2} = \boxed{\frac{r_n^2}{2} \sin \theta_n}$.

(b) Puisque l'on a n triangles identiques superposables, on a $n\theta_n = 2\pi$ donc $\boxed{\theta_n = \frac{2\pi}{n}}$

L'aire de chaque triangle vaut $\frac{1}{n}$ donc $\frac{r_n^2}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right) = \frac{1}{n}$ d'où $r_n^2 = \frac{2}{n \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right)}$ et

$$\text{donc } r_n = \boxed{\sqrt{\frac{2}{n \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right)}}}$$

$$(c) \quad r_n = \sqrt{\frac{2}{n \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right)}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\frac{2\pi}{n}}{\sin \left(\frac{2\pi}{n} \right)}}$$

Or $\frac{2\pi}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ donc $\sqrt{\frac{\frac{2\pi}{n}}{\sin \left(\frac{2\pi}{n} \right)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ par inverse et composition d'où

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}}$$

2. On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; \pi[$ par $f(x) = \frac{x}{\sin x}$

(a) f est dérivable sur $]0 ; \pi[$ car $\sin x \neq 0$ sur $]0 ; \pi[$ et $f'(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}$ est du signe de $g(x) = \sin x - x \cos x$

g est dérivable sur $[0 ; \pi]$ et $g'(x) = \cos x - (\cos x - x \sin x) = x \sin x > 0$ sur $]0 ; \pi[$.

g est alors croissante sur $[0 ; \pi]$ avec $g(0) = 0$ donc g est positive sur $]0 ; \pi[$.

On en déduit que $f' \geq 0$ sur $]0 ; \pi[$ et donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $]0 ; \pi[$.

(b) Le nombre r_n , pour $n \geq 4$, s'exprime à l'aide de la fonction f par $r_n = \sqrt{\frac{1}{\pi} f \left(\frac{2\pi}{n} \right)}$

Pour tout $n \geq 4$,

$$0 \leq 3 \leq n \leq n+1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 0 \leq \frac{2\pi}{n+1} \leq \frac{2\pi}{n} \leq \frac{2\pi}{3} \leq \pi.$$

Comme la fonction f est croissante sur $]0 ; \pi[$, on en déduit :

$$0 \leq f \left(\frac{2\pi}{n+1} \right) \leq f \left(\frac{2\pi}{n} \right) \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{\pi} f \left(\frac{2\pi}{n+1} \right) \leq \frac{1}{\pi} f \left(\frac{2\pi}{n} \right)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{\frac{1}{\pi} f \left(\frac{2\pi}{n+1} \right)} \leq \sqrt{\frac{1}{\pi} f \left(\frac{2\pi}{n} \right)} \Rightarrow \boxed{0 \leq r_{n+1} \leq r_n}.$$

La suite (r_n) est bien **décroissante** pour $n \geq 4$.

(c) La suite (r_n) est décroissante et minorée par 0, donc **convergente** vers un réel $L \geq 0$.