Devoir maison n° 10

Á rendre le jeudi 19 décembre 2024

Exercice 1 **Spirale de Théodore** (Théodore de Cyrène fin Ve - déb. IVe siècle av J.C.)

La plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$.
La spirale de Théodore est une spirale discrète, constituée de points $A_n, n \in \mathbb{N}^*$ tels que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n, et $OA_1 = A_nA_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. C'est sans doute l'une des plus anciennes spirales connue en mathématique.

On note z_n l'affixe du point A_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $z_1 = 1$.

1. En prenant comme unité 2 cm, construire les points A_n pour $n \in [\![1, 17]\!]$ et représenter ainsi le début de la spirale.
2. En traduisant les conditions sur le triangle OA_nA_{n+1}, montrer que la suite (z_n) vérifie : Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $z_{n+1} - z_n = \mathrm{i}az_n$ et $|a| = \dfrac{1}{|z_n|}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. On considère donc la suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $z_1 = 1$ et $z_{n+1} = z_n + \mathrm{i}\,\dfrac{z_n}{|z_n|}$

   Démontrer que $|z_n| = \sqrt{n}$ et $\arg(z_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $[\pi]$ pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 2 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$.
Pour tout entier $n \geqslant 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ donné, isocèle en O.
On note $r_n = \mathrm{OA}_n$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.
On construit le polygone P_n de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n. On note alors $r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$ l'affixe de B_n où θ_n est un réel de l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

1. (a) Exprimer en fonction de r_n et θ_n la hauteur issue de B_n dans le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{r_n^2}{2}\sin(\theta_n)$.
   (b) On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1.
   Donner, en fonction de n, une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}_n},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}_n}\right)$, puis montrer que
   $r_n = \sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}$
   (c) Déterminer la limite de la suite (r_n).

2. On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$
   (a) Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$.
   (b) Montrer que la suite (r_n) est décroissante à partir du rang 4.
   (c) En déduire que la suite (r_n) converge.