

Correction du Test n° 9

Sujet A

1. $u_n = n^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{1}{n^2} \ln n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$ par croissances comparées donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^0 = 1}$ par composition.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\left| \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n + k^2} \right| \leq \frac{1}{n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $x \in \mathbb{R}$, $|(-1)^n \sin(nx)| = |\sin(nx)| \leq 1$ et $|n + k^2| \geq n$

donc $\frac{1}{|n + k^2|} \leq \frac{1}{n}$ d'où $\boxed{\left| \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n + k^2} \right| \leq \frac{1}{n}}$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left| \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n + k^2} \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n + k^2} \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = n \times \frac{1}{n}$.

4. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k^2$.

I : $u_0 = 1$

H : Supposons que $u_k = 1 \forall k \leq n$ à un rang n .

On a alors $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1 = \frac{1}{n+1} \times (n+1) = 1$

C : On a démontré par récurrence forte que $u_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Correction du Test n° 9

Sujet B

1. $u_n = n^{-\frac{2}{n^2}} = e^{-\frac{2}{n^2} \ln n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$ par croissances comparées donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^0 = 1}$ par composition.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |u_n|$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|2 + u_n^2| \geq 2$ donc $\left| \frac{1}{2 + u_n^2} \right| \leq \frac{1}{2}$ et $|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |u_n|$

3. En déduire, à l'aide d'une récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Initialisation $u_0 = 2$ et $\frac{1}{2^{-1}} = 2$ donc l'inégalité est vraie au rang 0.

Hérédité Supposons qu'à un rang n on ait $|u_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

on a alors $|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$

Conclusion On a démontré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

4. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$.

I : $u_0 = 1 \leq 2^0 = 1$

H : Supposons que $u_k \leq 2^k \forall k \leq n$ à un rang n

On a alors $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n 2^k = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1 \leq 2^{n+1}$

C : On a démontré par récurrence forte que $u_n \leq 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$