NOM : .... **Lundi 9 décembre 2024**

Test n° 9

Sujet A

1. (a) Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = n^{\frac{1}{n^2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![1, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\left|\dfrac{(-1)^n \sin(nx)}{n+k^2}\right| \leq \dfrac{1}{n}$

   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^n \sin(nx)}{n+k^2}\right| \leq 1$

2. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k^2$.

   Démontrer par récurrence forte que $u_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$

NOM : .... **Lundi 9 décembre 2024**

Test n° 9

Sujet B

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = n^{-\frac{2}{n^2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2 + u_n^2}$

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}|u_n|$

   (b) En déduire, à l'aide d'une récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$

3. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

   Démontrer par récurrence forte que $u_n \leqslant 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$