# Primitives

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction.

## 1 Primitives et intégrales d'une fonction continue

### 1.1 Primitives d'une fonction sur un intervalle

**Définition 1.** Une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ est **une primitive** de $f$ sur $I$ si $F$ est dérivable sur $I$ et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

**Théorème 1.** Soit $f$ admettant une primitive $F$ sur $I$.

1. Les primitives de $f$ sur $I$ sont les fonctions $x \mapsto F(x) + C$, où $C \in \mathbb{K}$ est une constante.
2. Si $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ alors $f$ admet une unique primitive sur $I$ prenant la valeur $y_0$ en $x_0$.

**Exemple 1.** Déterminer la primitive de $f : x \mapsto x^3 - 2x + 5$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.

**Notation** Dans la pratique, on note $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$ une primitive quelconque de $f$ sur $I$.

| primitives usuelles | intervalle $I$ de validité |
|---|---|
| $\displaystyle\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ si $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ | $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$, $\mathbb{R}_+^*$ sinon |
| $\displaystyle\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(\lvert x\rvert)$ | $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ |
| $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a}$ si $a \in \mathbb{C}^*$ | $\mathbb{R}$ |
| $\displaystyle\int \ln(x)\mathrm{d}x = x\ln(x) - x$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $\displaystyle\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\displaystyle\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\displaystyle\int \tan(x)\mathrm{d}x = -\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$ | $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$, où $k \in \mathbb{Z}$ |
| $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin(x)$ | $]-1, 1[$ |

### 1.2 Lien entre primitives et intégrales d'une fonction continue

**Rappel** Si $f$ est continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est la valeur de l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, l'axe $(Ox)$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

**Théorème 2. Théorème fondamental du calcul intégral** Si $f$ est continue sur $I$, et si $a \in I$. alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de $f$ sur $I$.

Elle vérifie $F(a) = 0$. $F$ est dérivable sur $I$ et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

**Exemple 2.** Montrer que $F : x \mapsto \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t^2}\mathrm{d}t$ est définie, dérivable et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Corollaire 1.** Si $f$ est continue sur $I$ alors $f$ admet des primitives sur $I$.

De plus, si $F$ est une primitive quelconque de $f$ sur $I$, alors

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

**Remarque** Le résultat ne dépendant pas de $x$ : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \ldots$

**Exemple 3.** Calculer les intégrales suivantes : $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{1 + x^2}\mathrm{d}x \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t.$

## 2 Techniques de calcul de primitives ou d'intégrales

### 2.1 Utiliser la linéarité de l'intégrale ou la relation de Chasles

**Propriété 1.** Soient $f$ et $g$ des fonctions continues sur un intervalle $I$ et $(a, b, c) \in I^3$.

1. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ **Linéarité**
2. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ **Relation de Chasles**.

**Exemple 4.** Calculer les intégrales suivantes : $\int_{-1}^{2} \mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \frac{1}{1 + \mathrm{e}^x}\mathrm{d}x.$

### 2.2 Reconnaître la dérivée d'une fonction composée

**Propriété 2.** Soit $f$ continue sur un intervalle $J$, de primitive $F$ sur $J$.

Si $u$ est dérivable sur $I$, si $u'$ est continue sur $I$ et si $u(I) \subset J$ alors

$G : x \mapsto F(u(x))$ est une primitive de $g : x \mapsto u'(x)f(u(x))$ sur $I$.

**Exemple 5.** Déterminer les primitives de $g$ sur $I$ :

a) $g(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$ et $I = ]-1,1[$ b) $g(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^3}$ et $I = \mathbb{R}$.

**Cas particuliers** Si $\forall x \in I$, $ax+b \in J$, alors $\displaystyle\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$.

| formules usuelles | conditions de validité |
|---|---|
| $\displaystyle\int u'(x)(u(x))^\alpha \mathrm{d}x = \frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ si $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ | $u>0$ si $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $u$ ne s'annule pas si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$ |
| $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\mathrm{d}x = \ln(\lvert u(x)\rvert)$ | $u$ ne s'annule pas sur $I$ |
| $\displaystyle\int u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{u(x)}$ | |
| $\displaystyle\int u'(x)\sin(u(x))\mathrm{d}x = -\cos(u(x))$ | |
| $\displaystyle\int u'(x)\cos(u(x))\mathrm{d}x = \sin(u(x))$ | |
| $\displaystyle\int u'(x)\tan(u(x))\mathrm{d}x = -\ln(\lvert\cos(u(x))\rvert)$ | $u(I) \subset ]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[$, où $k \in \mathbb{Z}$ |
| $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}\mathrm{d}x = \arctan(u(x))$ | |
| $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}\mathrm{d}x = \arcsin(u(x))$ | $u(I) \subset ]-1,1[$ |

### 2.3 Intégration par parties

**Définition 2.** Une fonction $u$ est dite **de classe $\mathscr{C}^1$** sur $I$ si $u$ est dérivable sur $I$ et $u'$ est continue sur $I$.

**Théorème 3. I.P.P.** Si $u$ et $v$ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$
$$\text{alors } \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

**Remarque** Si $u$ et $v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$, alors $\displaystyle\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$.

**Exemple 6.** Calculer $\displaystyle\int \arctan(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 t^2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$.

### 2.4 Intégration par changement de variable

**Théorème 4. Changement de variable** Soit $f$ continue sur un intervalle $J$.

Si $\phi$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ telle que $\phi(I) \subset J$ alors $\forall (a,b) \in I^2$,
$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t.$$
Dans ce cas, on dit que l'on a effectué le changement de variable $x = \phi(t)$.

**Exemple 7.** Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $x = \sin(t)$.

**Remarque :** Si $f$ est continue sur $J$ et $\phi : I \to J$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective, alors
$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t, \text{ où } \forall (t,x) \in I \times J,\ x = \phi(t) \iff t = \phi^{-1}(x).$$

**Exemple 8.** Déterminer $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos^3(x)\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = \sin(x)$.

**Application :** Cas des fonctions paires, impaires ou périodiques :

1. si $f$ est continue sur $[-a,a]$ et paire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$
2. si $f$ est continue sur $[-a,a]$ et impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
3. si $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $T-$périodique alors $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

**Exemple 9.** Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^5(t)\mathrm{d}t$.

# 3 Quelques exemples de calculs de primitives ou d'intégrales

## 3.1 Fonctions du type $x \mapsto \cos^n(x)\sin^m(x)$, où $n$ et $m$ sont des entiers naturels

On linéarise en utilisant des formules de trigonométrie et/ou les formules d'Euler.

**Exemple 10.** Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t$.

## 3.2 Fonctions du type $x \mapsto P(x)\mathrm{e}ax$, où $P$ est une fonction polynôme

On peut effectuer des IPP successives en dérivant $P$. On peut aussi chercher une primitive de la forme $x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{ax}$, où $Q$ est un polynôme de même degré que $P$, par identification.

**Exemple 11.** Déterminer les primitives de $f : x \mapsto (x^3 + x)\mathrm{e}^x$.

## 3.3 Fonctions du type $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$, où $a$ et $b$ sont des réels

On écrit que $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}\mathrm{d}x\right)$ et $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}\mathrm{d}x\right)$.

**Exemple 12.** Déterminer les primitives de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}\sin(3x)$.

## 3.4 Fonctions rationnelles du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$, où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$

- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, on écrit $f(x) = \dfrac{1}{a(x-\alpha)^2}$.

**Exemple 13.** Déterminer les primitives de $f : x \mapsto \dfrac{1}{3x^2 + 6x + 3}$.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, on écrit $f(x) = \dfrac{1}{a(x-\alpha)(x-\beta)} = \dfrac{A}{x-\alpha} + \dfrac{B}{x-\beta}$.

**Exemple 14.** Déterminer les primitives de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 6x + 5}$.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, on écrit $f(x) = \dfrac{1}{a\left[(x-\alpha)^2 + \beta^2\right]} = \dfrac{1}{a\beta}\dfrac{1/\beta}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2 + 1}$, où $\beta \neq 0$.

**Exemple 15.** Déterminer les primitives de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 4x + 9}$.