Limites et continuité

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et $f : I \to \mathbb{R}$.

1 Limites d'une fonction

1.1 Limite finie ou infinie en un réel a

Définition 1. Soit un réel a appartenant à I ou extrémité de I et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

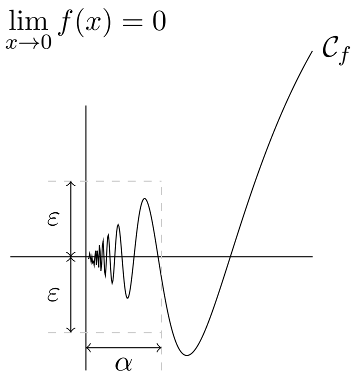
On dit que f **admet pour limite** ℓ **en** a si

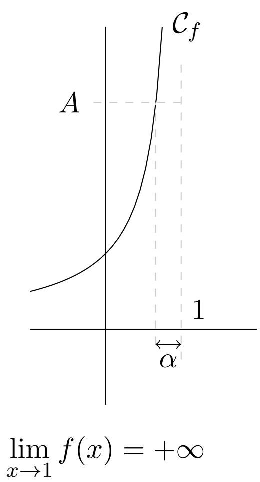
i) $\ell \in \mathbb{R}$ et $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$

ii) $\ell = +\infty$ et $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A.$

iii) $\ell = -\infty$ et $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq A.$

Dans tous les cas, on note $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.
Si de plus f est défnie en a alors cette limite est finie et vaut $f(a)$.





Remarque : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \iff f(a+h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \ell.$

Exemple 1. Limite de $f(x) = \sqrt{x+3}$ en 2 et de $g(x) = \ln(x+1)$ en -1.

Propriété 1. Si f admet une limite en a alors cette limite est unique. On la note $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Si de plus f est définie en a alors cette limite est finie et vaut $f(a)$.

1.2 Limite à droite et limite à gauche

Définition 2. Soit un réel a appartenant à I ou extrémité de I et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

1. f admet ℓ comme **limite à droite** en a si $f_{|I \cap]a,+\infty[}$ admet pour limite ℓ en a.

   Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell$.

2. f admet ℓ comme **limite à gauche** en a si $f_{|]-\infty,a[\cap I}$ admet pour limite ℓ en a.

   Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} \ell$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell$.

Exemple 2. Limite en 0 de $f(x) = \lfloor x \rfloor$, de $g(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^*}(x)$, de $h(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad x \in [-1,0] \\ 1-x & \text{si} \quad x \in]0,1] \end{cases}$.

Propriété 2. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si f est définie sur $I = [b,c]$ et $a \in]b,c[$, alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \quad \text{ssi} \quad f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell,\ f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} \ell \text{ et } \ell = f(a).$$

Définition 3. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $I = [b,c]$ et $a \in]b,c[$. Si f est définie sur $I \backslash \{a\}$, on dit que f admet pour limite ℓ en a si $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple 3. Limite en 0 de $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ et de $g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

1.3 Limite finie ou infinie en $\pm\infty$

Définition 4. Soit f définie sur $I = [b,+\infty[$, $b \in \mathbb{R}$, et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

On dit que f **admet pour limite** ℓ **en** $+\infty$ si

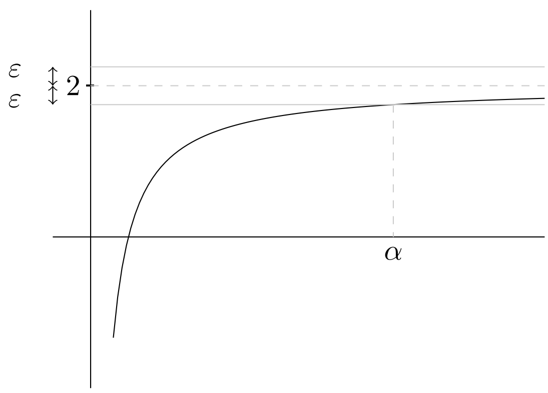
i) $\ell \in \mathbb{R}$ et $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ x \geq \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

ii) $\ell = +\infty$ et $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ x \geq \alpha \Longrightarrow f(x) \geq A$

iii) $\ell = -\infty$ et $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ x \geq \alpha \Longrightarrow f(x) \leq A$.

Dans tous les cas, on note $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$



Remarque : Les définitions sont similaires pour les limites en $-\infty$ (à écrire).
Si f admet une limite en $\pm\infty$ alors cette limite est unique, et notée $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Exemple 4. Limites de $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ en $\pm\infty$.

2 Propriétés des limites

2.1 Opérations sur les limites

Limite d'une somme $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_a f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_a g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_a (f+g)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Limite d'un produit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_a f$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_a g$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_a (f\times g)$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**	**F.I.**

Limite d'un quotient $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_a f$	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_a g$	$\ell' \neq 0$	0	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_a (f/g)$	ℓ/ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	0	**F.I.**	**F.I.**

Exemple 5. Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x\to-\infty}\left(x^3+\frac{1}{x}\right) \qquad \text{b) } \lim_{x\to+\infty}\left(5x-2\sqrt{x}\right) \qquad \text{c) } \lim_{x\to 0}\frac{3\sqrt{x}-1}{5x^2}$$

Propriété 3. Croissances comparées Soient $\alpha, \beta > 0$. On a :

1. $\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha |\ln(x)|^\beta = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{[\ln(x)]^\beta}{x^\alpha} = 0$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha \mathrm{e}^{\beta x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\beta x}}{[\ln(x)]^\alpha} = +\infty$.

Propriété 4. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$.

$a, b, \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sont tels que a et b sont éléments ou extrémités de I et J respectivement.

Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ et $g(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} \ell$ alors $g\circ f(x) = g(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple 6. Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right)$.

Propriété 5. Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ et

$a, \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, où a est élément ou extrémité de I.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple 7. Montrer que les fonctions cos et sin n'admettent pas de limite en $\pm\infty$.

2.2 Limites et inégalités

Définition 5. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

1. Si $a \in \mathbb{R}$, on appelle **voisinage** de a tout intervalle de la forme $]a-\alpha, a+\alpha[$, avec $\alpha > 0$.
2. Si $a = +\infty$, on appelle **voisinage** de a tout intervalle de la forme $]\alpha, +\infty[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Si $a = -\infty$, on appelle **voisinage** de a tout intervalle de la forme $]-\infty, \alpha[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Une propriété portant sur $f : I \to \mathbb{R}$ est dite vraie au voisinage de a ssi il existe un voisinage V de a tel que cette propriété est vraie sur $I \cap V$.

Propriété 6. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, élément ou extrémité de I .

1. Si f admet une limite finie ℓ en a alors f est bornée au voisinage de a.
2. Si f admet une limite finie ℓ non nulle en a alors f est du signe de ℓ au voisinage de a.

Théorème 1. Passage à la limite dans une inégalité large Soient $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, et si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.

Théorème 2. des gendarmes Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ au voisinage de a et si $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $h(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple 8. Étudier la limite de $f : x \mapsto x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ en 0.

Théorème 3. de minoration ou de majoration Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

1. Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ alors $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ (minoration).
2. Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$ (majoration).

Exemple 9. Étudier la limite de $f : x \mapsto \sqrt{x}\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ en 0.

Théorème 4. Limite monotone-admis Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. Si f est croissante majorée sur $]a, b[$ alors f admet une limite finie à gauche en b ;
2. Si f est croissante non majorée sur $]a, b[$ alors $f(x) \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} +\infty$
3. Si f est décroissante minorée sur $]a, b[$ alors f admet une limite finie à gauche en b
4. Si f est décroissante non minorée sur $]a, b[$ alors $f(x) \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} -\infty$

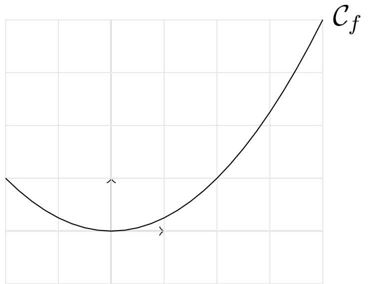
Remarque : On a des énoncés similaires pour la limite à droite en a (à écrire). Ainsi, si f est monotone sur l'intervalle $]a, b[$ alors f admet une limite finie ou infinie aux bornes de $]a, b[$.

3 Continuité d'une fonction

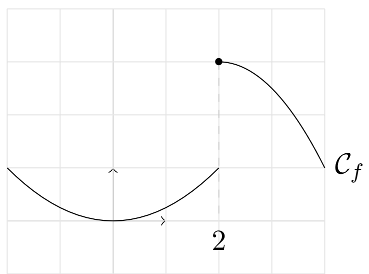
3.1 Définition de la continuité

Définition 6. Soit $a \in I$.

1. On dit que f est **continue** en a si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$. Sinon, f est dite discontinue en a.
2. On dit que f est **continue à droite** en a si $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} f(a)$.
3. On dit que f est **continue à gauche** en a si $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} f(a)$.



Fonction continue sur $[-2, 4]$



Fonction discontinue en $a = 2$

Exemple 10. Étudier la continuité en 0 des fonctions valeur absolue et partie entière.

Remarque : f est continue en a ssi elle est continue à droite et à gauche en a.

Définition 7. Soit $a \in I$ et f définie sur $I \backslash \{a\}$.

On dit que f est **prolongeable par continuité** en a ssi f admet une limite finie ℓ en a.

Dans ce cas, la fonction $\widetilde{f}$ définie sur I par $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in I \backslash \{a\} \\ \ell & si\ x = a \end{cases}$

est appelée prolongement par continuité de f en a.

Exemple 11. Montrer que $f : x \mapsto x \ln |x|$ admet un prolongement par continuité en 0.

Remarque : Le prolongement par continuité de f en a est une fonction continue en a.

Définition 8. On dit que f est continue sur I ssi f est continue en tout réel a de I.

L'ensemble des fonctions continues sur I est noté $\mathscr{C}^0(I)$, ou simplement $\mathscr{C}(I)$.

Propriété 7. Les fonctions polynômes, abs, exp, ch , sh , ln, puissances,
cos, sin, *tan*, arccos, arcsin, arctan sont continues sur leur ensemble de définition.

3.2 Fonctions continues et opérations

Propriété 8. Soit $a, \lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues en a (sur I) alors $f + g$, λf et fg sont continues en a (sur I).

Si de plus g ne s'annule pas en a (sur I) alors f/g est continue en a (sur I).

Exemple 12. Étudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 \ln(x)}{x-1}$.

Propriété 9. Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$.

1. Si f est continue en $a \in I$ et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.
2. Si f est continue sur I et g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I.

Exemple 13. Étudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto \arcsin(\sqrt{x-1})$.

3.3 Propriétés des fonctions continues

Théorème 5. des valeurs intermédiaires Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$.

Si k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarque : f continue sur $[a, b]$ "prend" toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$.

Exemple 14. Montrer que l'équation $\arccos(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$.

Corollaire 1. Soit une fonction f continue sur un intervalle I.

1. L'image $f(I)$ de I par f est un intervalle.
2. Si de plus f ne s'annule pas sur I, alors f est de signe constant.

Théorème 6. des bornes atteintes-admis Si f est une fonction continue sur un segment $I = [a, b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes (f admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$).

Exemple 15. Soit f continue et strictement positive sur $[a, b]$.

Montrer que f est minorée par un réel m strictement positif.

Théorème 7. de la bijection Si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I

alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.

De plus, f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même monotonie que f.

Exemple 16. Démontrer que l'équation $3\ln(x) = x$ admet exactement deux solutions.

4 Fonctions complexes

Définition 9. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et a élément ou extrémité de I.

1. On dit que f est **bornée** sur I s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in I$, $|f(x)| \leq K$.
2. On dit que f a pour **limite** $\ell \in \mathbb{C}$ en a si $|f(x) - \ell| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$. Ce que l'on note $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.
3. Si $a \in I$, on dit que f est **continue** en a si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$.
   On dit que f est continue sur I ssi f est continue en tout a de I.

Propriété 10. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et a élément ou extrémité de I.

1. Si f admet une limite finie en a alors cette limite est unique, et notée $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
2. Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

Propriété 11. (opérations sur les limites) Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ et a élément ou extrémité de I.

1. $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$ ssi $\mathrm{Re}(f(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(f(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell)$.
2. Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell' \in \mathbb{C}$ alors : $f(x) + g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell + \ell'$,
$$f(x) \times g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \times \ell' \quad \text{et} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell'} \quad (\text{si } g \text{ ne s'annule pas et } \ell' \neq 0).$$
3. Si f et g sont continues en $a \in I$ (sur I) alors $f + g$, fg, f/g (si g ne s'annule pas), $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et $|f|$ sont continues en a (sur I).