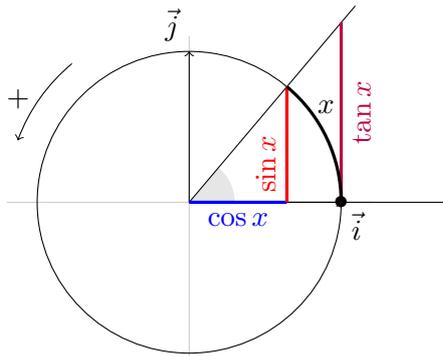


Trigonométrie

1 Le cercle trigonométrique



Dans un repère orthonormé du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1 est appelé cercle trigonométrique.

À tout réel $\theta \in \mathbb{R}$, on associe le point M de \mathcal{C} par "enroulement" de la droite réelle dans le sens direct si $\theta \geq 0$, ou dans le sens indirect si $\theta < 0$.

L'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ a pour mesure θ (en radians), mais aussi $\theta' = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Un tel nombre θ' est dit congru (ou égal) à θ modulo 2π , ce que l'on notera $\theta' = \theta [2\pi]$.

L'abscisse de M est appelée cosinus de θ et notée $\cos \theta$.

L'ordonnée de M est appelée sinus de θ et notée $\sin \theta$.

Propriété 1. $M(x, y) \in \mathcal{C} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (paramétrage de \mathcal{C}).

Le cercle \mathcal{C} a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$.

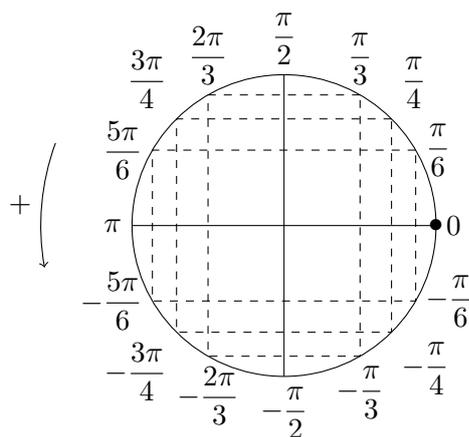
Définition 1. Soit M un point du cercle trigonométrique de coordonnées $(\cos \theta ; \sin \theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Si la droite (OM) n'est pas verticale, sa pente est appelée **tangente** de θ et notée $\tan \theta$.

2 Formulaire de trigonométrie

Propriété 2. Relations fondamentales

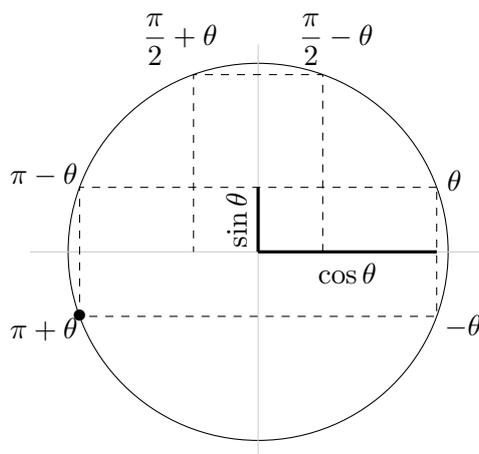
1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ et $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ et $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$



Valeurs remarquables

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini



Propriété 3. Angles associés Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

1. $\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$ $\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$
2. $\cos(-\theta) = \cos \theta$, $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ et $\tan(-\theta) = -\tan \theta$
3. $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$ $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$ et $\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$
4. $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ et $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$
5. $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$ $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$ et $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$
6. $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin \theta$ $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta$ et $\tan(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan \theta}$

Propriété 4. Équations trigonométriques Pour tout $a, x \in \mathbb{R}$,

1. $\cos x = \cos a \iff [(x = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } (x = -a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z})]$
2. $\sin x = \sin a \iff [(x = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } (x = \pi - a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z})]$
3. $\tan x = \tan a \iff (x = a + k\pi, k \in \mathbb{Z})$

Exemple 1. Résoudre dans \mathbb{R} : $2 \cos x = -1$, $\sin x = 1$ et $2 \sin x - 1 > 0$.

Propriété 5. Formules d'addition Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, si tout est défini,

$$1. \quad \cos(\theta + \theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \quad \cos(\theta - \theta') = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta'$$

$$2. \quad \sin(\theta + \theta') = \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta' \quad \sin(\theta - \theta') = \sin \theta \cos \theta' - \cos \theta \sin \theta'$$

$$3. \quad \tan(\theta + \theta') = \frac{\tan \theta + \tan \theta'}{1 - \tan \theta \tan \theta'} \quad \tan(\theta - \theta') = \frac{\tan \theta - \tan \theta'}{1 + \tan \theta \tan \theta'} .$$

Propriété 6. Formules de duplication Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, si tout est défini,

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta \quad \sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

Exemple 2. Linéariser $\cos^2(\theta)$ et $\sin^2(\theta)$.

Propriété 7. Transformation d'un produit en somme Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$,

$$\cos \theta \cos \theta' = \frac{1}{2} [\cos(\theta + \theta') + \cos(\theta - \theta')] \quad \sin \theta \sin \theta' = \frac{1}{2} [\cos(\theta - \theta') - \cos(\theta + \theta')]$$

$$\sin \theta \cos \theta' = \frac{1}{2} [\sin(\theta + \theta') + \sin(\theta - \theta')]$$

Exemple 3. Soit un entier $n \geq 2$. Calculer la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{2\pi} \cos t \cos(nt) dt$

Propriété 8. Transformation d'une somme en produit Pour tout $p, q \in \mathbb{R}$,

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \quad \sin p - \sin q = 2 \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \cos \left(\frac{p+q}{2} \right)$$

Exemple 4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $\cos x + \cos(2x)$