# Limites et continuité

**Exercice 1** On note $F$ la primitive sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$ qui s'annule en 0, c'est-à-dire que $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que $F$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
2. En déduire que $F$ admet une limite en $+\infty$
3. Montrer que pour $x \geq 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} \leq \arctan(x) - \frac{\pi}{4}$
4. En déduire que, pour tout $x \geq 0, F(x) \leq 1 + \dfrac{\pi}{4}$, puis que $F$ admet une limite finie en $+\infty$.

**Exercice 2**

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$.

   Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$. En déduire que $f$ est constante.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.
   Montrer que $\forall q \in \mathbb{Q},\ f(q) = qf(1)$. En déduire que $f$ est linéaire.

**Exercice 3** Dans chaque cas, étudier la continuité de $f$ et calculer ses limites aux bornes de son ensemble de définition.

1. $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$  2. $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$  3. $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{1-x^2}} & , x \in ]-1,1[ \\ 0 & , x \notin ]-1,1[ \end{cases}$.

**Exercice 4** On appelle point fixe d'une fonction $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ tout $x \in D_f$ vérifiant $f(x) = x$.

1. Soit $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ une fonction continue.
   Montrer que $f$ admet un point fixe.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement décroissante.
   Montrer que $f$ admet un unique point fixe.

**Exercice 5** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer, puis expliciter sa bijection réciproque.

**Exercice 6** Étant donné un nombre réel $a > 0$, on définit la fonction $f_a$ sur $\mathbb{R}$ par
$f_a(x) = \mathrm{e}^{a(x-1)}$.
On définit alors la suite $(u_n)$ par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f_a(u_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$.

**I. Convergence de la suite $(u_n)$**

1. Montrer, à l'aide d'une récurrence, que $(u_n)$ est croissante et à valeurs dans $[0,1]$.
2. En déduire que la suite $(u_n)$ converge puis montrer que sa limite est une solution de l'équation $ax - \ln(x) - a = 0$ $\quad(\boldsymbol{E})$.

   Donner une solution évidente de l'équation $(\boldsymbol{E})$.

**Dans toute la suite, on notera $L(a)$ la limite de la suite $(u_n)$.**

**II. Nombre de solutions de $(\boldsymbol{E})$**

On définit la fonction $g_a$ par $g_a(x) = ax - \ln(x) - a$.

1. Déterminer le domaine de définition $D$ de $g_a$, et montrer que $g_a$ est continue sur $D$.
2. Dresser le tableau de variation de $g_a$ en justifiant soigneusement chaque résultat.
3. **Cas** $a = 1$. On suppose dans cette question que $a = 1$.

   Montrer que l'équation $(\boldsymbol{E})$ admet une seule solution et déterminer la valeur de $L(1)$.
4. **Cas** $a \neq 1$. On suppose dans cette question que $a \neq 1$.

   (a) À l'aide du tableau de variation de la fonction $g_1$, montrer que $1 + \ln(a) - a < 0$.

   (b) En déduire que l'équation $(\boldsymbol{E})$ admet exactement deux solutions, l'une appartenant à l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{a}\right[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{a}, +\infty\right[$.

**Dans ce qui suit, on notera $r(a)$ la plus petite racine de l'équation $(\boldsymbol{E})$.**

**III. Évaluation de $L(a)$ si $\boldsymbol{0 < a < 1}$.** On suppose dans cette partie que $0 < a < 1$.

1. Montrer que $r(a) = 1$.
2. En déduire que $L(a) = 1$.

**IV. Évaluation de $L(a)$ si $\boldsymbol{a > 1}$.** On suppose dans cette partie que $a > 1$.

1. (a) Montrer que $r(a) \in ]0,1[$ et vérifier que $f_a(r(a)) = r(a)$.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq r(a)$. On pourra raisonner par récurrence.

   (c) En déduire que $L(a) = r(a)$.

2. (a) Démontrer que $\forall (x,x') \in \left[0, \dfrac{1}{a}\right]^2$, $\left|f_a(x) - f_a(x')\right| \leq \dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}} \left|x - x'\right|$. (On utilisera l'IAF)

   (b) En déduire, à l'aide d'une récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - L(a)| \leq \left(\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}\right)^n$.

   (c) Démontrer que $\left(\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   *Indication : on pourra utiliser que sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$, avec égalité uniquement pour $x = 0$.*