Dérivabilité

Exercice 1 Soit f définie par $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} + \ln(1+x) & \text{si} \quad x > 0 \\ b\,\mathrm{ch}\,(x) + cx + d & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$, où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une CNS pour que f soit continue en 0. Quelle est alors la valeur de $f(0)$?
2. Déterminer une CNS pour que f soit dérivable en 0. Quelle est alors la valeur de $f'(0)$?

Exercice 2 Trouver toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles :

1. $x^2y' - \alpha y = 0$ 2. $xy' + y = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Exercice 3 Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout polynôme P de degré n, l'équation $P(x) = \mathrm{e}^x$ admet au plus $n+1$ solutions réelles distinctes.

Exercice 4 Soit $\alpha \in]0,1[$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1-\alpha}{(k+1)^\alpha} \leq (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \leq \dfrac{1-\alpha}{k^\alpha}$
2. En déduire la limite de u_n.
3. Étudier le cas où $\alpha > 1$.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{1+x^n}{(1+x)^n}$

1. Démontrer que f admet un minimum à déterminer.
2. En déduire que pour tout $x \geq 0$, $(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n)$.
3. Montrer finalement que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n)$.

Exercice 6

1. Déterminer la dérivée n-*ième* de la fonction $g : x \mapsto (x+1)^2\mathrm{e}^{-x}$
2. (a) Déterminer la dérivée n-*ième* de la fonction $f : x \mapsto (x-a)^n(x-b)^n$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) En déduire la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$

Exercice 7 Prolonger par continuité f, puis déterminer si ce prolongement est $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition où $f(x) = \dfrac{|x|}{x}\ln(1-|x|)$

Exercice 8 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & si\ x < 0 \\ ax^2 + bx + c & si\ x \geq 0 \end{cases}$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$.

Exercice 9 Pour $x \in \mathcal{D} = \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$, on pose $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln(x)} & \text{sinon} \end{cases}$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **Étude de f :**
   (a) Déterminer l'ensemble des points fixes de f (solutions de l'équation $f(x) = x$ dans $\mathcal{D}$).
   (b) Montrer que f est continue sur chaque intervalle de $\mathcal{D}$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur chaque intervalle de $\mathcal{D}\backslash\{0\}$.
   (c) Pour $x \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
   (d) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur chaque intervalle de $\mathcal{D}$.
   (e) Montrer que f n'est pas deux fois dérivable en 0.
   (f) Calculer les limites de f et f' en 1^-, 1^+ et $+\infty$.
   (g) Dresser les tableaux de variations de f et de f'.
   (h) En déduire que $f([\mathrm{e}, +\infty[) \subset [\mathrm{e}, +\infty[$ et que
   $$\forall (x, x') \in [\mathrm{e}, +\infty[^2,\ \ |f(x) - f(x')| \leq \frac{1}{4}|x - x'|.$$
2. **Étude de (u_n) :**
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \mathrm{e}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \mathrm{e}| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \mathrm{e}|$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N},\ |u_n - \mathrm{e}| \leq \dfrac{1}{4^n}$.
   (d) En déduire un entier p tel que u_p est une valeur approchée de e à 10^{-6} près.