Correction du Devoir maison n° 9

1. $u_0 = \dfrac{1}{2} = 0,5$, $u_1 = \dfrac{3}{4} = 0,75$, $u_2 = \dfrac{7}{16} = 0,4375$ et $u_3 = \dfrac{207}{256} = 0,80859375$.

   On peut conjecturer que (u_n) n'est pas monotone, que (u_{2n}) est décroissante et que (u_{2n+1}) est croissante. Pour la convergence, en calculant d'autres termes, on peut conjecturer que (u_{2n}) converge vers 0, que (u_{2n+1}) converge vers 1 et donc que (u_n) ne converge pas.

2. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

   Comme $u_0 = 0,5 \in [0;1]$, cette propriété est vérifiée au rang 0.

   De plus, si $0 \leq u_n \leq 1$ à un rang $n \in \mathbb{N}$, alors $0 \leq u_n^2 \leq 1$ (car la fonction $x \mapsto x^2$ croît sur $[0;1]$) et $0 \leq 1 - u_n^2 \leq 1$. On en déduit que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ et l'hérédité est vérifiée.

   Ainsi, on a bien $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1}$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f \circ f(x) = f(f(x)) = 1 - (f(x))^2 = 1 - (1 - x^2)^2$. Ainsi g est définie par $\boxed{g(x) = -x^4 + 2x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}}$.

   g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $g'(x) = -4x^3 + 4x = 4x(1 - x^2)$. Comme $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0;1]$, on en déduit que $g' > 0$ sur $]0;1[$. Comme, de plus, $g'(0) = g'(1) = 0$ alors
   $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [0;1]}$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f \circ f(u_{2n})$. Comme $g = f \circ f$, on a bien $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} = g(u_{2n})}$.

   Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{2n+2} \leq u_{2n} \leq 1$.

   Comme $0 \leq u_2 \leq u_0 \leq 1$, cette propriété est vraie au rang 0.

   De plus, si $0 \leq u_{2n+2} \leq u_{2n} \leq 1$ à un rang $n \in \mathbb{N}$ alors $g(0) \leq g(u_{2n+2}) \leq g(u_{2n}) \leq g(1)$ car g est croissante sur $[0;1]$. On en déduit que $0 \leq u_{2n+4} \leq u_{2n+2} \leq 1$ car $g(0) = 0$, $g(u_{2n+2}) = u_{2n+4}$, $g(u_{2n}) = u_{2n+2}$ et $g(1) = 1$. L'hérédité est vérifiée.

   Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{2n+2} \leq u_{2n} \leq 1}$.

   On en déduit que la suite (u_{2n}) est décroissante et minorée par 0.
   Donc $\boxed{(u_{2n}) \text{ converge vers un réel } \ell}$, d'après le téorème de la limite monotone.

5. Comme ci-dessus, on montre que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+3} = g(u_{2n+1})}$.

   En utilisant que $0 \leq u_1 \leq u_3 \leq 1$ et que g est croissante sur $[0;1]$, on montre encore par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{2n+1} \leq u_{2n+3} \leq 1}$.

   Donc la suite (u_{2n+1}) est croissante et majorée par 1.
   Donc $\boxed{(u_{2n+1}) \text{ converge vers un réel } \ell'}$, d'après le téorème de la limite monotone.

6. (u_{2n}) est décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leq u_0$. Par passage à la limite on a $\ell \leq 0,5$.

   (u_{2n+1}) est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} \geq u_1$. Par passage à la limite on a $\ell' \geq 0,75$.

   On en déduit que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers des limites finies différentes (car $\ell \neq \ell'$) et donc que $\underline{(u_n)}$ n'admet ni une limite finie, ni une limite infinie.

   Comme (u_n) est bornée, il découle alors du théorème de la limite monotone que la suite $\underline{(u_n)}$ n'est pas monotone.