

Correction du concours blanc n° 1

Partie A On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$

La courbe représentative de f dans un repère orthonormé donné sera notée C .

1. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x \mapsto 1+x^2$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, $1+x^2 \neq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $\ln$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$2. f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x \ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 - 2x \ln x}{x(1+x^2)^2}$$

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.

- (a) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = 2x - (4x \ln x + 2x^2 \times \frac{1}{x}) = -4x \ln x$ est du signe de $-\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0$ par croissances comparées donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ par somme.

$g(x) = 1 + x^2(1 - 2 \ln x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2x \ln x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ par produit et somme

x	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$			2	
		1		$-\infty$

- (b) D'après la question précédente, l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]0, 1[$.

Sur $[1, +\infty[$, g est continue et strictement décroissante, donc g est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $g([1, +\infty[) =]-\infty, 2]$ qui contient 0, donc

l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée m , sur $[1, +\infty[$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. f' est du signe de g sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, d'après les 2 questions précédentes,

x	0	m	$+\infty$	
$g(x)$		+	0	-
$f(x)$				
		$-\infty$		0

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ par quotient.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \text{ par croissance comparées et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

par quotient donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$ par produit.

5. On a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ donc

$\boxed{\text{la courbe } C \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x = 0.}$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc

$\boxed{\text{la courbe } C \text{ admet une asymptote horizontale en } +\infty \text{ d'équation } y = 0.}$

6. $\boxed{f(1) = 0}$ et $f(m) = \frac{\ln m}{1 + m^2}$ Or $g(m) = 1 + m^2 - 2m^2 \ln m = 0 \Leftrightarrow \ln m = \frac{1 + m^2}{2m^2}$ puis

$$f(m) = \frac{1 + m^2}{2m^2} = \frac{1}{2m^2}$$

Partie B On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1 + t^2} dt.$$

1. (a) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc $F' = f$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème fondamental du calcul intégral, F est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1. Ainsi,

$\boxed{F \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ et } \forall x > 0, F'(x) = f(x).}$

(b) Soit $x > 0$ fixé. On pose $u = \frac{1}{t}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $t = 1$ alors $u = 1$ et si $t = x$ alors $u = 1/x$.

De plus, $du = -\frac{1}{t^2} dt$ donc $-\frac{1}{u^2} du = dt$.

Par changement de variable dans l'intégrale, on obtient :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1 + t^2} dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln \frac{1}{u}}{1 + \left(\frac{1}{u}\right)^2} \times \frac{-1}{u^2} du = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln u}{u^2 + 1} du = F\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)}.$

(c) $F(1) = \int_1^1 f(t) dt = 0$

Soit $x > 1$ fixé. On a : $\forall t \in [1, x], f(t) = \frac{\ln t}{1 + t^2} \geq 0$.

Donc, par positivité de l'intégrale, $F(x) = \int_1^x f(t) dt \geq 0, \forall x > 1$.

Si $0 < x < 1$ alors $\frac{1}{x} > 1$ et $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$.

Par disjonction des cas, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) \geq 0}$.

Autre justification Si $0 < x < 1, f < 0$ d'après la partie A, donc par positivité de l'intégrale, $\int_x^1 f(t)dt \leq 0, \forall 0 < x < 1$ puis $F(x) = -\int_x^1 f(t)dt \geq 0$.

2. φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas.

Soit $x > 0$ fixé. On a : $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

On pose $u'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et $v(t) = \ln t$, $u(t) = \arctan t$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$.

u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par intégration par parties, on obtient :

$$F(x) = \left[\arctan(t) \ln(t) \right]_1^x - \int_1^x \frac{\arctan(t)}{t} dt = \arctan(x) \ln(x) - \int_1^x \varphi(t) dt.$$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = \arctan(x) \ln(x) - \int_1^x \varphi(t) dt}$.

Exercice 2

$$(E) : x^2 y'' + x y' + 9y = x^2$$

On note (H) l'équation homogène associée à (E) $(H) : x^2 y'' + x y' + 9y = 0$.

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $\varphi : x \mapsto ax^2 + bx + c$, deux fois dérivable sur I : $\varphi'(x) = 2ax + b$ et $\varphi''(x) = 2a$.

φ est solution de (E) si, et seulement si, $\forall x \in I$,

$$x^2 (2a) + x (2ax + b) + 9(ax^2 + bx + c) = 1 + x^2.$$

On obtient, après développement et identification, $\boxed{\varphi : x \mapsto \frac{1}{13}x^2}$.

2. (a) La fonction $t \mapsto e^t$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans I , et f est deux fois dérivable sur I . Par composition, $\boxed{g \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}}$.

(b) $g'(t) = e^t f'(e^t)$ et $g''(t) = e^t f'(e^t) + e^{2t} f''(e^t)$.

- (c) f est solution de (H) sur I si, et seulement si, $\forall x \in I, x^2 f''(x) + x f'(x) + 9f(x) = 0$.

En posant $t = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^t$, t décrivant $\mathbb{R}$ lorsque x décrit I , on obtient de façon équivalente :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{2t} f''(e^t) + e^t f'(e^t) + 9f(e^t) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\forall t \in \mathbb{R}, g''(t) + 9g(t) = 0}$$

- (d) L'équation caractéristique : $r^2 + 9 = 0$, possède deux racines complexes $r = 3i$ et $\bar{r} = -3i$.

Les solutions de (H_1) sur $\mathbb{R}$ sont $t \mapsto g(t) = a \cos(3t) + b \sin(3t)$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Or $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = f(e^t) \Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) = g(\ln(x))$.

Les solutions de (H) sur I sont

$$\boxed{x \mapsto g(\ln(x)) = a \cos(3 \ln(x)) + b \sin(3 \ln(x)), \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2}$$

3. Les solutions générales de (E) sur I sont

$$x \mapsto \varphi(x) = \frac{1}{13}x^2 + a \cos(3 \ln(x)) + b \sin(3 \ln(x)), \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 3 On considère la suite (u_n) suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{u_n}}, \forall n \in \mathbb{N}$.

On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

1. (a) La fonction $f : x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}$, fonction puissance d'exposant strictement négatif, est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et
- $$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} < 0$$
- f est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Elle a pour limite 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$ et $+\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		—
$f(x)$	$+\infty$	0

- (b) $f(x) - x = \frac{1 - x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ est du signe de $1 - x\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et
- $$\forall x > 0, 1 - x\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x\sqrt{x} \Leftrightarrow 1 \geq x^3 \text{ et } x > 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	—

2. (a) Si $x \in]0, +\infty[$ alors $f(x) \in]0, +\infty[$ donc on démontre par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsque $u_0 \in]0, +\infty[$ ce qui assure l'existence de tous les termes u_n , $n \in \mathbb{N}$, lorsque $u_0 \in]0, +\infty[$.
- (b) Si $u_0 = 1$, une autre récurrence prouve que la suite (u_n) est constante égale à 1, en utilisant $f(1) = 1$.
- (c) $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f \circ f(v_n)$,
et $w_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = f \circ f(w_n)$.
- (d) Comme f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, $f \circ f$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
En effet : soient $(x, y) \in]0, +\infty[$ tels que $x < y$, on a $f(x) > f(y)$, donc $f(f(x)) < f(f(y))$.

Si $u_0 \in]0, 1[$, alors $u_1 = \frac{1}{\sqrt{u_0}} \in]1, +\infty[$, puis $u_2 = \sqrt{\sqrt{u_0}} > u_0$ et $u_3 = \sqrt{\sqrt{u_1}} < u_1$.

On montre alors par récurrence les propriétés $\mathcal{P}_n : \ll v_n \leq v_{n+1} \gg$ et $\mathcal{Q}_n :$

$\ll w_n \geq w_{n+1} \gg$.

Elles sont initialisées ci-dessus, puisque $v_0 = u_0$, $v_1 = u_2$, $w_0 = u_1$ et $w_1 = u_3$.

Si elles sont vraies à un certain rang n , alors la stricte croissance de $f \circ f$ assure qu'elles sont vraies au rang $(n + 1)$.

Dans ce cas, la suite (v_n) est croissante et la suite (w_n) est décroissante.

Si $u_0 \in]1, +\infty[$, alors $u_1 \in]0, 1[$, et des raisonnements analogues à ceux du cas précédent prouvent que la suite (v_n) est décroissante et la suite (w_n) est croissante.

- (e) Remarquons d'abord que les intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ sont stables par la fonction $f \circ f : x \mapsto x^{\frac{1}{4}}$.

Si $u_0 \in]0, 1[$, tous les termes de la suite (v_n) sont dans $]0, 1[$ et tous ceux de (w_n) sont dans $]1, +\infty[$.

Ainsi, (v_n) est croissante et majorée par 1 et (w_n) est décroissante et minorée par 1.

Si $u_0 \in]1, +\infty[$, les résultats sont les mêmes en échangeant les rôles des $f \circ f$

Ces deux suites convergent donc vers un réel ℓ tel que

$$f \circ f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{\ell}} = \ell \Leftrightarrow \ell = 1 \text{ car } f \text{ n'est pas définie en } 0.$$

Les suites (v_n) et (w_n) convergent donc vers 1.

- (f) Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes deux vers 1, il en va donc de même de la suite $(u_n) = (u_{2n}) \cup (u_{2n+1})$