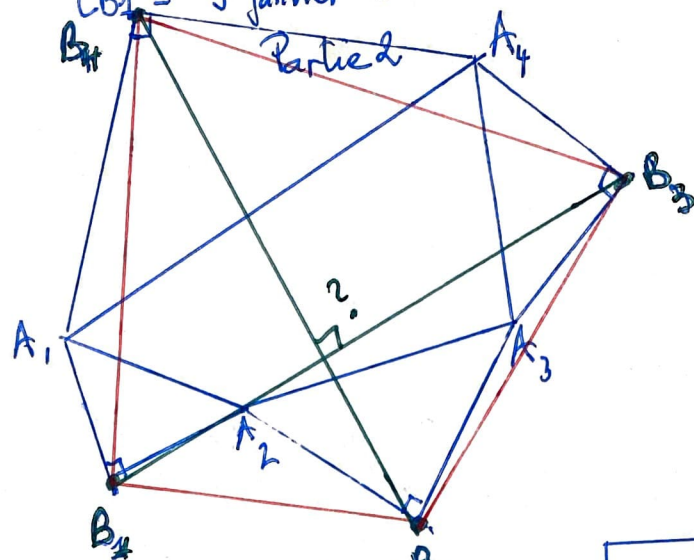


Partiel

Ex1

1)



$$B_1 B_3 \neq B_2 B_4$$

2) 3) Il est nécessaire et suffisant que
 puisque $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et que cette relation traduit le fait
 que le vecteur $\overrightarrow{B_i A_i}$ est l'image de $\overrightarrow{B_{i+1} A_{i+1}}$ par la
 rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

$$z_{A_i} - z_{B_i} = i |z_{A_{i+1}} - z_{B_{i+1}}|$$

4) On a donc $z_{A_1} - z_{B_1} = i (z_{A_2} - z_{B_2}) \Rightarrow (1-i) z_{B_1} = z_{A_1} - i z_{A_2}$ (1)

De même $(1-i) z_{B_2} = z_{A_2} - i z_{A_3}$ (2)

$(1-i) z_{B_3} = z_{A_3} - i z_{A_4}$ (3)

$(1-i) z_{B_4} = z_{A_4} - i z_{A_1}$ (4)

Par suite (4) - (2) donne $(1-i) (z_{B_4} - z_{B_2}) = z_{A_4} - i z_{A_1} - z_{A_2} + i z_{A_3}$

et (3) - (1) donne $(1-i) (z_{B_3} - z_{B_1}) = z_{A_3} - i z_{A_4} - z_{A_1} + i z_{A_2}$

d'où $(1-i) (z_{B_4} - z_{B_2}) = i (1-i) (z_{B_3} - z_{B_1})$

soit $z_{B_4} - z_{B_2} = i (z_{B_3} - z_{B_1})$.

Par conséquent le vecteur $\overrightarrow{B_2 B_4}$ est image du vecteur
 $\overrightarrow{B_1 B_3}$ par la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

Les diagonales de $B_1 B_2 B_3 B_4$ sont donc orthogonales
 et de même longueurs

Ex2 Représentons $S_{a,b}$ sous forme matricielle et appliquons la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 2-a & b \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-a & b \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a & b-a \end{array} \right)$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a & b-a \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a^2 \end{array} \right)$$

1) D'où $S_{a,b} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$. Par suite $S_{1,b}$

est compatible uniquement lorsque $b=1$.

2) $S_{1,1} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

L'ensemble des solutions de $S_{1,1}$ est donc

$$\begin{cases} x = 1-p-q \\ y = p \\ z = q, \quad p, q \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3) Puisque $a \neq 1$ on a maintenant

$$S_{a,b} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{b-a}{1-a} \\ 0 & 1-a & 1 & 1+a \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{b-a}{1-a} \\ 0 & 0 & -a & (1+a)\frac{1-b}{1-a} \end{array} \right)$$

D'où $S_{a,b}$ est compatible lorsque $a \neq 1$ si

$a \neq 0$ ou alors $a=0$ et $b=1$

4) $S_{a,b}$ admet une infinité de solutions lorsque $a \neq 1$ uniquement si $a=0$ et $b=1$

Alors $S_{0,1} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ a donc pour solutions

$$\begin{cases} x = -p \\ y = 1-p \\ z = p, \quad p \in \mathbb{R} \end{cases}$$

5) $S_{a,b}$ admet une unique solution uniquement lorsque $a \neq 0$

$$\text{Alors } S_{a,b} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{b-a}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1+a}{a} \quad \frac{b-1}{1-a} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & \frac{1+a-b-ab+a^2-a^3}{a(1-a)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1+a-b-a^2}{a(1-a)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1+a}{a} \quad \frac{b-1}{1-a} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1-b}{a(1-a)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1+a-b-a^2}{a(1-a)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1+a}{a} \quad \frac{b-1}{1-a} \end{array} \right)$$

Cette solution est alors

$$\begin{cases} x = \frac{1-b}{a(1-a)} \\ y = \frac{1+a-b-a^2}{a(1-a)} \\ z = \frac{(1+a)(b-1)}{a(1-a)} \end{cases}$$

Ex3 1) $A_n = \left(\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 4^p \right) - \binom{n}{0} 4^0 - \binom{n}{n} 4^n = 5^n - 1 - 4^n$

$A_n = 5^n - 4^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Notons que $\frac{1}{p+1} \binom{n}{p} = \frac{n!}{(p+1)p!(n-p)!} = \frac{n!}{(p+1)!(n-p)!}$

$= \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n+1-(p+1))!}$ mit $\frac{1}{p+1} \binom{n}{p} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{p+1}$

d'où $B_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{p+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n \binom{n+1}{p+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k}$

$$A_{n+1} \quad B_n = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0} \right) = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)$$

$$B_n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$C_n(x) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} e^{ipx} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (e^{ix})^p$$

$$= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (e^{ix} + 1)^n \quad \text{Or } e^{ix} + 1 = e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}} \right)$$

$$= 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}$$

$$\text{D'ou } (e^{ix} + 1)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) e^{in\frac{x}{2}}$$

$$\text{et } C_n(x) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

2) Avec $k' = 2n - k$ on a :

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) = \sum_{k=n-1}^1 \ln\left(\sin\left(\frac{(2n-k')\pi}{2n}\right)\right) = \sum_{k'=1}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\pi - \frac{k'\pi}{2n}\right)\right)$$

Or $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\text{D'ou } \sin\left(\pi - \frac{k'\pi}{2n}\right) = \sin\left(\frac{k'\pi}{2n}\right) \text{ de sorte qu'on a bien}$$

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{2n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)}$$

$$3) \quad i) \quad \boxed{\sum_{k=0}^m (u_{k+1} v_{k+1} - u_k v_k) = u_{m+1} v_{m+1} - u_0 v_0}$$

$$ii) \text{ d'ou } \sum_{k=0}^m (u_{k+1} v_{k+1} - \cancel{u_{k+1} v_k} + \cancel{u_k v_{k+1}} - u_k v_k)$$

$$= \sum_{k=0}^m u_{k+1} (v_{k+1} - v_k) + \sum_{k=0}^m (u_{k+1} - u_k) v_k \stackrel{i)}{=} u_{m+1} v_{m+1} - u_0 v_0$$

ce qui donne bien

$$(SPP) \quad \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) v_k = u_{n+1} v_n - u_0 v_0 - \sum_{k=0}^n u_{k+1} (v_{k+1} - v_k)$$

iii) Posons $u_k = q^k$ et $v_k = k$. D'après ii) cela donne

$$S_n(q) = q^{n+1} (n+1) - q^0 \cdot 0 - \sum_{k=0}^n q^{k+1} (k+1 - k)$$

soit

$$S_n(q) = (n+1) q^{n+1} - \sum_{k=0}^n q^{k+1}$$

or, si $q \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^n q^{k+1} = q \sum_{k=0}^n q^k = q \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

d'où

$$S_n(q) \stackrel{q \neq 1}{=} (n+1) q^{n+1} - q \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

iv) Mais

$$S_n(q) = \sum_{k=0}^n k q^k (q-1) = (q-1) \sum_{k=0}^n k q^k$$

Ainsi, d'après iii), on a

$$\sum_{k=0}^n k q^k \stackrel{q \neq 1}{=} \frac{S_n(q)}{q-1} = \frac{(n+1) q^{n+1}}{q-1} + q \cdot \frac{1-q^{n+1}}{(q-1)^2}$$

v)

$$\sum_{k=0}^n k^3 \stackrel{(SPP)}{=} (n+1)(n+1)^3 - 0 \cdot 0^3 - \sum_{k=0}^n (k+1) \underbrace{(k+1^3 - k^3)}_{\text{or } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^3 &= (n+1)^4 - \sum_{k=0}^n (k+1) ((k+1)^2 + (k+1)k + k^2) \\ &= (n+1)^4 - \sum_{k=0}^n (3k^2 + 6k + 4(k+1)) \end{aligned}$$

16. D'au $4 \sum_{k=0}^n k^3 = (n+1)^4 - 6 \sum_{k=0}^n k^2 - 4 \sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^n 1$

$$= (n+1)^4 - \cancel{6} \frac{n(n+1)(2n+1)}{\cancel{6}} - 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$$

$$= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)$$

$$= (n+1) \left[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1 \right]$$

$$= (n+1) \left[n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - 2n - 1 \right]$$

$$= (n+1) \left[n^3 + n^2 \right] = n^2 (n+1)^2$$

Ainsi $\boxed{\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2}$

4) $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n-1} i \sum_{j=i+1}^n j = \sum_{i=1}^{n-1} i \left(\sum_{j=1}^n j - \sum_{j=1}^i j \right)$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} i \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} \right) = \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (i^3 + i^2)$$

D'au $\sigma_n = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(n-1)n}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

Soit $\sigma_n = \frac{6n^2(n+1)(n-1) - 3(n-1)^2n^2 - 2(n-1)n(2n-1)}{24}$

$$\sigma_n = \frac{n(n-1)}{24} \left[\underbrace{6n(n+1) - 3n(n-1) - 2(2n-1)}_{\substack{6n^2 + 6n - 3n^2 + 3n - 4n + 2 \\ \parallel}} \right]$$

$$3n^2 + 5n + 2 = (n+1)(3n+2)$$

Ainsi $\boxed{\sigma_n = \frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{24}}$