Concours blanc n° 1

La partie 1 doit être traitée séparément de la partie 2. Outre votre nom et votre classe, vous indiquerez Partie 1 et Partie 2 sur ces copies et emboîterez les feuillets correspondants dans le bon ordre de lecture. Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Partie 1

Exercice 1 **8,5 points** : **A.1.** 0.5 **A.2.** 0.5 **A.3.(a)** 1.5 **A.3.(b)** 0.5 **A.4.** 1 **A.5.** 0.5 **A.6.** 0.5 **B.1.(a)** 0.5 **B.1.(b)** 1 **B.1.(c)** 1 **B.2.** 1

Partie A On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$

La courbe représentative de f dans un repère orthonormé donné sera notée C.

1. Justifier que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.
   (a) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée m, sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Déterminer les asymptotes à la courbe C.
6. Calculer $f(1)$ et montrer que $f(m) = \dfrac{1}{2m^2}$

Partie B On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

1. (a) Justifier que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner sa dérivée.
   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   Indication : on pourra utiliser le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.
   (c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) \geq 0$.
2. Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x}$.
   Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \arctan(x)\ln(x) - \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 2 **4.5 points** : **1.** 1 **2.(a)** 0.5 **2.(b)** 1 **2.(c)** 0.5 **2.(d)** 1 **3** 0.5

L'objectif de cet exercice est de déterminer les fonctions y de la variable réelle x définies et deux fois dérivables sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$(E) : x^2\, y'' + x\, y' + 9\, y = x^2$$

On note (H) l'équation homogène associée à (E) $(H) : x^2\, y'' + x\, y' + 9\, y = 0.$

1. Donner une fonction solution particulière φ de (E) sur I.
2. Pour $x \in I$, on pose $t = \ln(x)$.
   Si f est une fonction deux fois dérivable sur I, on pose $g(t) = f\left(e^t\right)$, pour tout réel t.
   (a) Montrer que la fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Pour tout réel t, calculer $g'(t)$ et $g''(t)$.
   (c) Montrer alors que la fonction f est solution de (H) sur I si, et seulement si, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g''(t) + 9\, g(t) = 0$.
   (d) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(H_1) : y'' + 9\, y = 0$ puis en déduire les solutions à valeurs réelles de l'équation (H).
3. Déterminer toutes les fonction solutions à valeurs réelles de (E) sur I.

Exercice 3 **7 points** : **1.(a)** 1.5 **1.(b)** 1 **2.(a)** 0.5 **2.(b)** 0.5 **2.(c)** 0.5 **2.(d)** 2 **2.(e)** 0.5 **2.(f)** 0.5

On considère la suite (u_n) suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}, \forall n \in \mathbb{N}$.

On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

1. (a) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   (b) Étudier le signe de $f(x) - x$ lorsque x décrit $]0, +\infty[$.
2. (a) Montrer que la suite (u_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$.
   (b) Que dire de la suite (u_n) lorsque $u_0 = 1$?

   Dans toute la suite, u_0 est un élément quelconque de $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

   On note (v_n) et (w_n) les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ et $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$.
   (d) En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont strictement monotones.

   On précisera leurs sens de variations, en distinguant les cas où $u_0 \in]0, 1[$ et l $u_0 \in]1, +\infty[$.

   (e) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes.
   (f) En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Partie 2

Exercice 1 **6 points** : **1.** 1 **2.** 1 **3.** 2 **4.** 2

Tout point P est représenté par son affixe z_p. On s'intéresse dans cet exercice à tous les quadrilatères du plan.

1. Représenter graphiquement un tel quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ en le choisissant direct.
2. Posons $A_5 = A_1$ et pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, construisons, à partir du côté $[A_i, A_{i+1}]$ et vers l'extérieur de ce quadrilatère, les triangles $A_iB_iA_{i+1}$ isocèles et rectangles en B_i.
   On observera que ces triangles $A_iB_iA_{i+1}$ sont alors directs.

   Représenter sur le graphique de la question 1) ces triangles et les points B_i pour chaque $i \in [\![1, 4]\!]$.
3. Quelle relation doivent satisfaire $z_{A_i}, z_{B_i}, z_{A_{i+1}}$ pour garantir que chaque triangle $A_iB_iA_{i+1}$ est direct, isocèle et rectangle en B_i ?
4. En déduire que les diagonales du quadrilatère $B_1B_2B_3B_4$ sont automatiquement orthogonales et de même longueurs.

Exercice 2 **6 points** : **1.** 1 **2.** 1 **3.** 1 **4.** 0.5+1.5 **5.** 0.5+1

Soit $S_{a,b}$ le système

$$\begin{cases} ax + y + z & = 1 \\ x + ay + z & = a \\ x + y + (2-a)z & = b \end{cases}$$

aux inconnues réelles x, y, z et paramètres réels a, b.

On utilisera la méthode du pivot de Gauss afin de justifier chacune de ses réponses.

1. Pour cette question a $= 1$. À quelle condition $S_{1,b}$ est-il compatible ?
2. Expliciter pour $a = 1$ et $b = 1$, l'ensemble des solutions de $S_{1,1}$.

On suppose par la suite que $a \neq 1$.

3. À quelle condition supplémentaire le système $S_{a,b}$ devient-il incompatible ?
4. À quelle condition supplémentaire le système $S_{a,b}$ admet-t-il une infinité de solutions ? Décrire cet ensemble de solutions.
5. À quelle condition supplémentaire le système $S_{a,b}$ admet-t-il une unique solution ? Quelle est-elle ?

Exercice 3 **8 points** : **1.** 3 **2.** 1 **3. (i)** 0.5 **3.(ii)** 0.5 **3.(iii)** 0.5 **3.(iv)** 0.5 **3.(v)** 1 **4.** 1

1. Évaluer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} 4^p, B_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p+1} \binom{n}{p} \text{ et } C_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sin(px).$$

2. À l'aide d'un changement approprié d'indice, montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right).$$

3. i) Simplifier par télescopage $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1}v_{k+1} - u_k v_k)$.

   ii) En déduire la formule de sommation par parties (analogue discret d'une IPP)

$$(SPP) \quad \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k)\, v_k = u_{n+1}v_{n+1} - u_0 v_0 - \sum_{k=0}^{n} u_{k+1}\,(v_{k+1} - v_k)$$

iii) Effectuer une sommation par parties pour évaluer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $q \neq 1$,

$$S_n(q) = \sum_{k=0}^{n} k\left(q^{k+1} - q^k\right)$$

iv) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kq^k$.

v) À l'aide d'une SPP (Cf. 3)ii)), en posant $u_{k+1} - u_k = 1$ et $v_k = k^3$, évaluer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$.

4) En utilisant le 3)v), évaluer

$$\sigma_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$$