

# Géométrie dans le plan

## 1 Coordonnées dans le plan

**Définition 1.** Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  du plan sont **colinéaires** s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{u} = \lambda\vec{v}$  ou  $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ . On note  $\text{Vect}(\vec{u})$  l'ensemble des vecteurs colinéaires à  $\vec{u}$ .

**Définition 2.** On appelle **base du plan** tout couple  $(\vec{i}, \vec{j})$  où  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont deux vecteurs non colinéaires.

On appelle **repère cartésien** du plan tout couple  $(O, \mathcal{B})$  où  $O$  est un point appelé **origine du repère** et  $\mathcal{B}$  une base du plan.

**Définition 3.** On appelle **coordonnées cartésiennes** d'un point  $M$  (resp. d'un vecteur  $\vec{u}$ ) du plan les nombres réels  $x$  et  $y$  tels que  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$  (resp.  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ).

**Remarque :** Les coordonnées d'un point ou d'un vecteur sont uniques.

**Définition 4.** Une base et un repère sont dits **orthogonaux** si les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont orthogonaux. Ils sont dits **orthonormés** lorsque  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont de norme 1 et orthogonaux. Une base et un repère sont dits **directs** si l'angle orienté  $(\vec{i}, \vec{j})$  a une mesure dans  $]0, \pi[$ , et **indirects** sinon.

Dans toute la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

**Théorème 1.** Soient  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  deux points du plan et  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un vecteur du plan.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

**Définition 5.** On appelle **coordonnées polaires** d'un point  $M$  distinct de l'origine (resp. d'un vecteur  $\vec{u} \neq \vec{0}$ ) du plan les nombres réels  $r > 0$  et  $\theta$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} OM = r \\ (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta \quad [2\pi] \end{array} \right. \quad \left( \text{resp.} \left\{ \begin{array}{l} \|\vec{u}\| = r \\ (\vec{i}, \vec{u}) = \theta \quad [2\pi] \end{array} \right. \right)$$

**Remarque :** Il n'y a pas unicité pour la coordonnée  $\theta$ , définie modulo  $2\pi$ .

## 2 Produit scalaire dans le plan

**Définition 6.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan. On appelle **produit scalaire** de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$  et on note  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  le nombre réel

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) && \text{lorsque } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont tous deux non nuls} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 && \text{sinon} \end{aligned}$$

**Remarques :** 1. Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de même sens alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .

En particulier  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ .

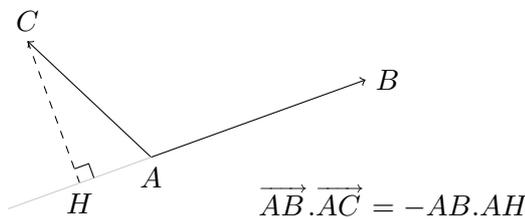
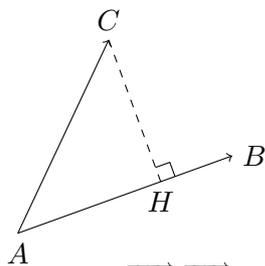
2. Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de sens opposé alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .

**Définition 7.** Soit  $\mathcal{D}$  une droite du plan. On appelle **projection orthogonale** d'un point  $M$  sur la droite  $\mathcal{D}$  l'unique point  $H$  de la droite  $\mathcal{D}$  tel que les droites  $(MH)$  et  $\mathcal{D}$  soient orthogonales.

**Remarque :** Lorsque le point  $M$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$ , il est confondu avec son projeté.

**Proposition 1.** Si  $A, B, C$  sont trois points distincts et si  $H$  est le projeté orthogonal du point  $C$  sur la droite  $(AB)$  alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \cdot AH & \text{si } H \in [AB] \\ -AB \cdot AH & \text{sinon} \end{cases}$$



**Théorème 2.** Deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux ssi  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

**Exemple 1.** Pour quelles valeurs du nombre réel  $a$  les vecteurs  $\vec{u} = (a + 1)\vec{i} + (2 + a)\vec{j}$  et  $\vec{v} = a\vec{i} - a\vec{j}$  sont-ils orthogonaux ?

**Propriété 1.** Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont des vecteurs alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ . Le produit scalaire est **symétrique**.

**Théorème 3.** Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont deux vecteurs du plan alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

**Propriété 2.** Si  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont des vecteurs du plan et si  $\lambda$  et  $\mu$  sont des nombres réels alors

$$1. \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \mu(\vec{u} \cdot \vec{w}) \quad \text{Linéarité à droite}$$

$$2. (\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \mu(\vec{v} \cdot \vec{w}) \quad \text{Linéarité à gauche}$$

On dit que le produit scalaire est **bilinéaire**.

**Exemple 2.** Soit  $ABC$  un triangle tel que  $AB = 4$ ,  $AC = 3$  et  $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ .

1. Calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  et en déduire  $\vec{CB} \cdot \vec{CA}$ .
2. L'angle  $\widehat{ACB}$  est-il aigu ou obtus ?

**Proposition 2.** Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont des vecteurs du plan alors  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

### 3 Produit mixte dans le plan

**Définition 8.** Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs, on appelle **produit mixte** de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , et on note  $[\vec{u}, \vec{v}]$ , le nombre réel

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{lorsque } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont tous deux non nuls}$$

$$[\vec{u}, \vec{v}] = 0 \quad \text{sinon}$$

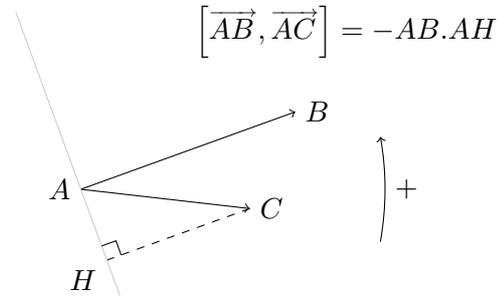
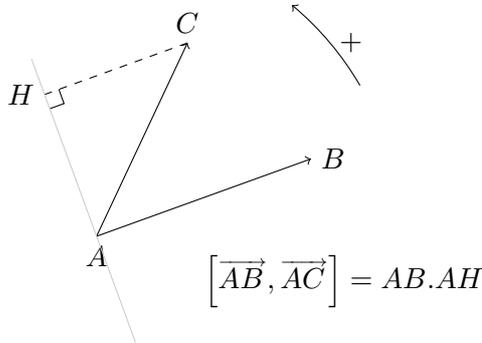
**Remarques :** 1. Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux dans le sens direct, c'est-à-dire si  $(\vec{u}, \vec{v}) = +\frac{\pi}{2} [2\pi]$ , alors  $[\vec{u}, \vec{v}] = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

2. Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux dans le sens indirect, c'est-à-dire si  $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ ,  $[\vec{u}, \vec{v}] = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

3. Pour tout vecteur  $\vec{u}$ ,  $[\vec{u}, \vec{u}] = 0$ .

**Proposition 3.** Si  $A, B, C$  sont des points distincts et si  $H$  est le projeté orthogonal du point  $C$  sur la droite perpendiculaire à  $(AB)$  passant par  $A$  alors

$$[\vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{cases} AB.AH & \text{lorsque } (\vec{AB}, \vec{AH}) = +\frac{\pi}{2} [2\pi] \\ -AB.AH & \text{lorsque } (\vec{AB}, \vec{AH}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$



**Interprétation géométrique**  $||[\vec{u}, \vec{v}]||$  est l'aire du parallélogramme porté par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

**Théorème 4.** Deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires ssi  $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$ .

**Propriété 3.** Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont des vecteurs du plan alors  $[\vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}]$ .  
Le produit mixte est **antisymétrique**.

**Théorème 5.** Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont des vecteurs du plan alors  $[\vec{u}, \vec{v}] = xy' - x'y$

**Exemple 3.** Calculer l'aire du triangle ABC :

a) A(1 , -1) B(4 , -5) et C(0 , -3)

b) A(-2 , -2) B(6 , -1) et C(0 , 2)

**Propriété 4. Bilinearité du produit mixte**  
Si  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont des vecteurs du plan et si  $\lambda$  et  $\mu$  sont des nombres réels alors

$[\vec{u}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}] = \lambda[\vec{u}, \vec{v}] + \mu[\vec{u}, \vec{w}]$     **Linéarité à droite**

$[\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \vec{w}] = \lambda[\vec{u}, \vec{w}] + \mu[\vec{v}, \vec{w}]$     **Linéarité à gauche**

**Exemple 4.** Trouver les valeurs du réel  $a$  pour lesquelles les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires :

a)  $\vec{u} = (1 + a)\vec{i} + (2 - a)\vec{j}$  et  $\vec{v} = a\vec{i} - 2a\vec{j}$

b)  $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$  et  $\vec{v} = (1 + a)\vec{i} + (1 - a)\vec{j}$

## 4 Droites dans le plan

**Définition 9.** Soit  $A$  un point et  $\vec{u}$  un vecteur non nul. On appelle **droite passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$**  l'ensemble des points  $M$  pour lesquels  $\vec{u}$  et  $\overrightarrow{AM}$  sont colinéaires. Cette droite est notée  $D = A + \text{Vect}(\vec{u})$  où  $\text{Vect}(\vec{u})$  est l'ensemble des vecteurs colinéaires à  $\vec{u}$

### Théorème 6. Équation d'une droite

La droite passant par le point  $A(x_A, y_A)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  admet pour équation

•  $[\vec{u}, \overrightarrow{AM}] = \alpha(y - y_A) - \beta(x - x_A) = 0$     **Équation cartésienne**

•  $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$     **Représentation paramétrique**

La droite passant par le point  $A(x_A, y_A)$  et de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  admet pour équation

•  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$     **Équation cartésienne**

**Remarques :** Toute droite admet une équation de la forme  $ax + by + c = 0$ , avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $(a, b) \neq (0, 0)$ .

Une telle droite admet pour vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  et comme vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .

- Exemple 5.**
1. Donner une équation cartésienne de la droite  $D$  passant par le point  $A(1, 2)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(3, 0)$ .
  2. Donner une équation cartésienne de  $(AB)$  où  $A(1, 2)$  et  $B(2, 0)$ .
  3. Donner une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$  de vecteur normal  $\vec{n}(1, 2)$  passant par le point  $A(1, 1)$ .

**Proposition 4.** La droite  $D$  passant par  $A(x_A, y_A)$  et de coefficient directeur ou pente  $m$  a pour équation réduite  $y = mx + p$ . Si  $B(x_B, y_B) \in D$  alors  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

**Remarque** Les droites d'équation  $x = \lambda$  n'ont pas une équation réduite de la forme  $y = mx + p$ .

**Proposition 5.** Si une droite  $D$  a pour équation réduite  $y = mx + p$  alors  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $D$  et  $\vec{n} \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à  $D$ .

De plus, si  $\theta = (\vec{i}, \vec{u})$  alors  $m = \tan \theta$ .

### **Théorème 7. Distance d'un point à une droite**

Si  $H$  est le projeté orthogonal d'un point  $M$  sur une droite  $\mathcal{D}$  d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$  alors la distance du point  $M$  à la droite  $\mathcal{D}$  est  $HM = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

**Exemple 6.** Déterminer la distance du point  $M(-1, -1)$  à la droite  $D$  de vecteur directeur  $\vec{u}(3, 4)$  passant par le point  $A(3, 2)$ .

## 5 Cercles dans le plan

**Définition 10.** On appelle **cercle** de centre  $\Omega$  et de rayon  $R \in \mathbb{R}^+$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\Omega M = R$ .

**Théorème 8.** L'équation du cercle de centre  $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$  et de rayon  $R$  est

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

**Exemple 7.**

1. Caractériser l'ensemble d'équation  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ .
2. Caractériser l'ensemble d'équation  $x^2 + y^2 - 1 = x - y$ .
3. La droite  $D$  d'équation  $2x + y - 2 = 0$  et le cercle  $C$  d'équation  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  sont-ils sécants ?

**Théorème 9.** Soient  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  deux points distincts.

Le cercle  $C$  de diamètre  $[AB]$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ .

$$M(x, y) \in C \Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0.$$

**Exemple 8.** On considère un cercle  $\mathcal{C}$  dont une équation est  $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$  et une droite  $(d) : x - y - 8 = 0$ .

1. Déterminer les coordonnées du centre  $\Omega$  du cercle  $\mathcal{C}$  ainsi que son rayon.
2. Calculer les coordonnées des points d'intersection  $A$  et  $B$  du cercle  $\mathcal{C}$  et de la droite  $(d)$ .
3. Déterminer les équations cartésiennes des tangentes au cercle  $\mathcal{C}$  aux points  $A$  et  $B$ .
4. Démontrer que ces tangentes sont perpendiculaires et calculer les coordonnées de leur point d'intersection  $E$  puis vérifier que  $E$  appartient à la médiatrice du segment  $[AB]$ .