Géométrie dans le plan

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 1 Pour quelles valeurs du nombre réel m les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} m+3 \\ m+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ m-1 \end{pmatrix}$ constituent-t-ils :

1. une base du plan ? 2. une base orthogonale du plan ?

Exercice 2 On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

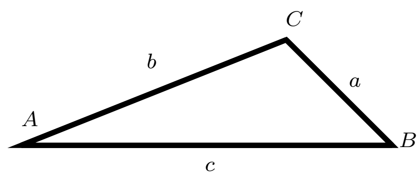
Déterminer l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 3 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Démontrer que $\|2\vec{u} + 3\vec{v}\| = \|2\vec{u} - 3\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 4 Soit ABC un triangle quelconque. On note a, b, c les longueurs respectives de BC, AC, AB, S l'aire du triangle ABC et p son demi-périmètre.

1. (a) Développer $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$.
   (b) En déduire que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{BAC})$.
   Formule d'Al Kashi
2. (a) Montrer que $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]^2 + (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2 = b^2c^2$.
   (b) En déduire que $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.
   Formule de Héron



Exercice 5 Soit ABC un triangle quelconque. On note a, b, c les longueurs respectives de BC, AC, AB.

Démontrer que $\dfrac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \dfrac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \dfrac{c}{\sin(\widehat{ACB})}$ **Relation des sinus**

Exercice 6 On considère un point A, un vecteur $\vec{u}$ non nul du plan, un réel k ainsi que la droite $D = \text{A} + \text{Vect}(\vec{u})$.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = k$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $[\vec{u}, \overrightarrow{AM}] = k$.

Exercice 7 Soient $A(1;1), B(3;7)$ et $C(-1;3)$ trois points du plan.

1. (a) Déterminer les équations cartésiennes de deux médianes du triangle ABC.
   (b) Quelles sont les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC ?
2. (a) Déterminer les équations cartésiennes de deux médiatrices du triangle ABC.
   (b) Quelles sont les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC ?

3. (a) Déterminer les équations cartésiennes de deux hauteurs du triangle ABC.
   (b) Quelles sont les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC ?
4. Vérifier que H, G et Ω sont alignés.

Exercice 8 1. Soit D la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Donner une équation cartésienne de la droite D.

2. On considère la famille de droites Δ_m d'équations cartésiennes

$mx + (m-1)y + 2 = 0, m \in \mathbb{R}$.

Pour quelle(s) valeur(s) du nombre réel m Δ_m est parallèle à D ?

Exercice 9 Soient $A(3;1)$ et D la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

1. Donner une équation cartésienne de la droite D .
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D' perpendiculaire à D et passant par le point A.
3. On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite D.
   Déterminer les coordonnées du point H.
4. On note A' le symétrique du point A par rapport à la droite D.
   Déterminer les coordonnées de A'.

Exercice 10 Calculer la distance du point M à la droite D dans les cas suivants :

1. M$(4, -1)$ et D a pour équation cartésienne $x + 2y + 3 = 0$.
2. M$(0, 0)$ et $D = \mathrm{B} + \mathrm{Vect}(\vec{u})$ avec B $(5;3)$ et $\vec{u}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
3. M$(1, -1)$ et D est la droite passant par B$(2;2)$ et de vecteur normal $\vec{n}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 Soit $ABCD$ un carré de côté 1 . Pour tout réel $\lambda \in]0,1[$, on considère les points P_λ sur $[AB]$ et Q_λ sur $[BC]$ tels que $BP_\lambda = BQ_\lambda = \lambda$.

On note H_λ le projeté orthogonal de B sur la droite $(P_\lambda C)$.

On se place dans le repère orthonormé $\mathcal{R} = (B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

1. Donner les coordonnées des points $B, C, A, D, P_\lambda, Q_\lambda$ dans le repère $\mathcal{R}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite $(P_\lambda C)$ puis une équation cartésienne de la droite $(H_\lambda B)$
3. Calculer les coordonnées de H_λ.
4. En déduire que les droites $(H_\lambda Q_\lambda)$ et $(H_\lambda D)$ sont perpendiculaires pour tout $\lambda \in]0,1[$.