Correction du devoir maison n° 11

Exercice 1 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \boxed{= -2A + 3I_3.}$

2. Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.

   I : pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ et la propriété est vérifiée au rang 0 en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

   H : supposons qu'à un rang n, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.

   On a alors $A^{n+1} = A \times A^n = a_n A^2 + b_n A = a_n(-2A + 3I_3) + b_n I_3 = (b_n - 2a_n)A + 3a_n I_3$

   Donc $A^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} I_3$ en posant $a_{n+1} = b_n - 2a_n$ et $b_{n+1} = 3a_n$

   C : On a montré par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $\boxed{A^n = a_n A + b_n I_3.}$

3. $\begin{cases} a_{n+1} = b_n - 2a_n \\ b_{n+1} = 3a_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 3a_{n-1} - 2a_n \\ b_{n+1} = 3a_n \end{cases}$

   (a_n) est donc une suite linéaire récurrente d'ordre 2, avec pour équation caractéristique $r^2 + 2r - 3 = 0$ qui s'annule en 1 et -3, d'où $a_n = A + B(-3)^n$, $A, B \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

   $a_0 = A + B = 0$ et $a_1 = A - 3B = 1$ d'où $A = -B = \dfrac{1}{4}$ puis

   $\boxed{a_n = \dfrac{1 - (-3)^n}{4} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$

   $b_n = 3a_{n-1} = \dfrac{3 - 3(-3)^{n-1}}{4} = \dfrac{3 + (-3)^n}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ avec $b_0 = 1$ donc

   $\boxed{b_n = \dfrac{3 + (-3)^n}{4} \, \forall n \in \mathbb{N}}$ puis $\boxed{A^n = \dfrac{1 - (-3)^n}{4} A + \dfrac{3 + (-3)^n}{4} I_3 \, \forall n \in \mathbb{N}}$

Exercice 2 Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(1, 1, -2)$.

1. Par la méthode de Gauss Jordan, on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

2. On pose $A = PDP^{-1}$.

D est inversible comme matrice diagonale à coefficients diagonaux non nuls et A et inversible comme produit de matrices inversibles avec
$A^{-1} = \left(PDP^{-1}\right)^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1} D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$
On montre alors par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir TD 11 Exercice 6) et pour $n < 0, A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n = \left(PDP^{-1}\right)^n = PD^{-n}P^{-1}$ ce qui montre que $\boxed{A^n = PD^nP^{-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}}$