Correction du Test n° 10

Sujet A

1.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (a) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Conjecture : $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier n.

   I : Pour $n = 0, B^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ pou $n = 0$

   H : Supposons que $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ à un rang n.

   On a alors $B^{n+1} = B^n \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{pmatrix}$

   C : On a montré par récurrence que $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier n.

3. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

   $L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

   $L_2 \leftarrow -L_2$ et $L_3 \rightarrow L_3 - L_2$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

   $L_1 \rightarrow L_1 + L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Correction du Test n° 10

Sujet B

1.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Conjecture : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier n.

   I : Pour $n = 0$, $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pou $n = 0$

   H : Supposons que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ à un rang n.

   On a alors $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   C : On a montré par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier n.

3. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

   $L_1 \leftrightarrow L_2$ et $L_3 \leftarrow 2L_2 - L_3$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$

   $L_1 \to L_1 - L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$