Correction du Test n° 11 Sujet A

1. $x^{\frac{1}{x-1}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x-1}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+u)}{u}} \longrightarrow \mathrm{e}$ lorsque $u \longrightarrow 0$ en posant $x = 1+u$ car $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$

2. f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2\, e^{-\frac{1}{x}}$

   $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ par composition et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

   f est donc prolongeable par continuité en 0 à droite en posant

   $$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

3. $f(x) = (x+1)\ln(1+x)$ si $x \neq -1$ et $f(-1) = 0$, sur $[-1, +\infty[$.

   f est définie et continue sur $]-1, +\infty[$ comme produit de fonctions qui le sont, avec

   $1 + x > 0$

   $f(x) = (x+1)\ln(1+x) = X \ln X$ avec $X = x+1 \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow -1$

   donc $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 0$ par croissances comparées et f est continue en -1.

   $\dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \ln(1+x) \longrightarrow -\infty$ lorsque $x \longrightarrow -1^+$ donc f n'est pas dérivable en -1

Correction du Test n° 11 Sujet B

1. $x^{\frac{x}{x-1}} = \mathrm{e}^{\frac{x\ln x}{x-1}} = \mathrm{e}^{\frac{(1+u)\ln(1+u)}{u}} \longrightarrow \mathrm{e}$ lorsque $u \longrightarrow 0$ en posant $x = 1+u$ car $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$

2. f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

   $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 + e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ par composition et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

   f est donc prolongeable par continuité en 0 à droite en posant

   $$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^2 \ln(x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

   f est définie, continue, dérivable de dérivée continue sur chaque intervalle de $\mathbb{R}_+^*$ par

   composée de fonctions qui le sont, avec $x > 0$.

   $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ par croissances comparées, donc f est continue en 0

   $f'(x) = 2x \ln x + x$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0$ par somme et croissances comparées, donc f' est dérivable en continue en 0 et f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

$\dfrac{f'(x)}{x} = 2\ln x + 1 \longrightarrow -\infty$ lorsque $x \longrightarrow 0$ donc f' n'est pas dérivable en 0.