Polynômes

Exercice 1 Déterminer $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

1. $P(X+1) = XP(X)$ 2.$P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

Exercice 2 Effectuer la division euclidienne de P par Q :

1. $P = X^5 + X^3 + 1$ et $Q = X^2 + 3X + 1$ $P = X^4 + \mathrm{i}X + 1$ et $Q = X^2 + \mathrm{i}X - 1$.

Exercice 3

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\sin(\alpha)X + \cos(\alpha))^n$ par $X^2 + 1$.

2. (a) Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^p - 1$.

   (b) En déduire l'ensemble des couples $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $X^n - 1$ soit divisible par $X^p - 1$.

Exercice 4

1. Montrer que le polynôme $X^2 + X$ divise $(X+1)^{2n+1} - X^{2n+1} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que le polynôme $X^2 + X + 1$ divise $(X+1)^{2n+1} + X^{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 Dans chaque cas, vérifier que a est racine de P, puis déterminer sa multiplicité :

1. $P = X^6 - 7X^5 + 17X^4 - 16X^3 + 8X^2 - 16X + 16$ et $a = 2$.
2. $P = X^{n+1} - (n+1)X + n$ et $a = 1$.

Exercice 6

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme P_n vérifiant $P_n - P_n' = X^n$.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n n'admet que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 7 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $X^5 - 1$ 2. $X^4 + 2X^3 + 7X^2 + 8X + 12$, sachant qu'il admet une racine imaginaire pure.

3. $X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$, sachant que 3 est une racine 4. $X^{2n} + X^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 Polynômes de Tchebychev

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $\begin{cases} P_0 = 1, \\ P_1 = X, \\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1. Déterminer P_2 et P_3.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \quad (\star)$.
3. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation $(\star)$.
4. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Déterminer les racines de P_n dans $\mathbb{R}$.
6. En déduire l'expression factorisée de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

   Vérifier que l'on retrouve ainsi P_2 et P_3.

Exercice 9 Pour tout entier $n \geq 2$, on considère le polynôme $P_n = (X+1)^n - 1$.

1. Déterminer les racines de P_n dans $\mathbb{C}$, puis factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Montrer qu'il existe un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n = XQ_n$.

   On écrira Q_n sous forme développée et factorisée.
3. En évaluant $Q_n(0)$ de deux façons différentes, calculer le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 10 Décomposer en élément simple les fractions rationnelles suivantes :

1. Dans $\mathbb{R}(X)$: $F = \dfrac{1}{X\,(X^2-1)\,(X+2)}$ $\qquad G = \dfrac{X^5 - 2X^3 + 2}{X^4 - 1}$
2. Dans $\mathbb{C}(X)$: $H = \dfrac{1 + \mathrm{i}X}{1 - \mathrm{i}X}$ $\qquad I = \dfrac{\mathrm{i} + X}{1 + 2\mathrm{i}X}$
3. Déterminer les valeurs des réels a, b, c tels que $\mathrm{F}(X) = \dfrac{X^2+2}{X^2(X-1)} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X^2} + \dfrac{c}{X-1}$