Polynômes

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

1.1 Définition d'un polynôme et de son degré

Définition 1. Un **polynôme** P à une indéterminée X est défini par une suite finie de coefficients $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, où $n \in \mathbb{N}$, et peut s'écrire :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 X^0$$

L'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 1. Soit $P = X^2 + X + X^0$. Définir :

a) $P(2)$ b) $P(u)$, où $u : x \mapsto \cos(x)$ c) $P(A)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Définition 2. Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$.

1. On dit que P est le polynôme nul (et on note $P = 0$) si tous ses coefficients sont nuls.
2. On dit que P et Q sont égaux (et on note $P = Q$) si P et Q ont les mêmes coefficients.

Définition 3. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ non nul.

1. Si n est le plus grand entier tel que $a_n \neq 0$ alors n est appelé **degré** de P et noté $\deg(P)$,

   a_n est appelé **coefficient dominant** de P et $a_n X^n$ le **terme de plus haut degré** de P.
2. P est dit unitaire si son coefficient dominant est 1.
3. Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.
4. L'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré au plus n est noté $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple 2. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P(1) = P(-2) = 0$ et $P(0) = 1$.

1.2 Somme, produit et composée de polynômes

Définition 4. Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ dans $\mathbb{K}[X]$. On définit :

1. la **somme** de P et Q par $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k$
2. le **produit** de P par $\lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda P = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) X^k$
3. le **produit** de P et Q par $P \times Q = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) X^k$
4. le polynôme **composé** de P et Q par $P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$.

Exemple 3. Soient $P = X^2$ et $Q = 5X^3 - X + 3$.

Calculer $Q \circ P$ et $P \circ Q$ et donner le degré et le coefficient dominant de chacun d'eux.

Remarque : $P \circ X = P(X) = P$.

Propriété 1. La somme et le produit de polynômes vérifient :

1. $P + (Q + R) = (P + Q) + R$ et $P \times (Q \times R) = (P \times Q) \times R$ **Associativité**
2. $P + Q = Q + P$ et $P \times Q = Q \times P$ **Commutativité**
3. $P + 0 = 0 + P = P$ et $P \times 1 = 1 \times P = P$ **Élément neutre**
4. $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$ et $(P + Q) \times R = P \times R + Q \times R$ **Distributivité**

Remarque : On pose $P - Q = P + (-1)Q$, $P^0 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P^{k+1} = PP^k$.

Propriété 2. Si $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ alors

1. $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ 2. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\deg(P^k) = k \times \deg(P)$.

Exemple 4. Soient $P = 3X^2 + (1 - \mathrm{i})X$ et $Q = 2X^3 - 5X + \mathrm{i}$.

Déterminer le degré et le coefficient dominant de $P + Q$, $(1 + \mathrm{i})P$, PQ et P^3.

Propriété 3. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. $PQ = 0 \Longleftrightarrow (P = 0 \text{ ou } Q = 0)$ **Intégrité**

2 Racines d'un polynôme et relation de divisibilité

2.1 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 5. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

On dit que B **divise** A (et on note $B|A$) s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.

Dans ce cas, on dit que B est un **diviseur** de A ou que A est un **multiple** de B.

Exemple 5. Montrer que $X - 1$ divise $X^3 - 2X^2 + 3X - 2$.

Remarque : Tout polynôme A divise 0. Tout polynôme A est divisible par $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et λA.

Théorème 1. (et définition) Si $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, avec $B \neq 0$.

alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

Q et R sont respectivement appelés **quotient et reste de la division euclidienne** de A par B.

Exemple 6. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B :

a) $A = X^2 + 1$ et $B = X + \mathrm{i}$ b) $A = 7X^8 + 4X^3 - X + 1$ et $B = X^2 + 2$.

Corollaire 1. Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, avec $B \neq 0$.

B divise A ssi le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

2.2 Racines et multiplicités

Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on note $P : z \mapsto P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ la **fonction polynomiale** associée à P.

Définition 6. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une **racine** du polynôme P si $P(\alpha) = 0$.

Théorème 2. $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P ssi $X - \alpha$ divise P.

Exemple 7. Déterminer les racines de $P = X^3 - X - 6$ dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{R}$.

Définition 7. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant. P est dit **scindé** s'il s'écrit comme produit de polynômes de degré 1.

Exemple 8. Le polynôme $P = X^4 - 1$ est-il scindé dans $\mathbb{C}[X]$? dans $\mathbb{R}[X]$?

Définition 8. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P de **multiplicité** $m \in \mathbb{N}^*$ si

$(X-\alpha)^m$ divise P et $(X-\alpha)^{m+1}$ ne divise pas P.

Une racine simple (resp. double) de P est une racine de P de multiplicité 1 (resp. 2).

Exemple 9. Racines et multiplicités dans $\mathbb{R}$ de $P = (X^2-1)^2$ et $Q = X^4 - 1$.

Remarque : $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ ssi $P = (X-\alpha)^m Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Propriété 4. Si $\deg(P) = n$ alors P possède au plus n racines, comptées avec multiplicités.

Conséquence : Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet plus de n racines distinctes alors $P = 0$.

Deux fonctions polynômiales sont égales ssi elles ont même degré et mêmes coefficients.

2.3 Dérivation d'un polynôme

Définition 9. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

On appelle **polynôme dérivé** de P le polynôme $P' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$.

Exemple 10. Dériver $P = X^3 + (1+2\mathrm{i})X^2 + 3$ et $Q = 3X^2 - X + 2$.

Remarque : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la fonction $P : x \mapsto P(x)$ a pour dérivée $P' : x \mapsto P'(x)$.

Propriété 5. Si $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ alors 1. $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$

2. $(PQ)' = P'Q + PQ'$ 3. $\deg(P') = -\infty$ si P est constant et $\deg(P') = \deg(P) - 1$ sinon.

Définition 10. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Les **dérivées successives** de P sont définies par : $P^{(0)} = P$ et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P^{(k+1)} = (P^{(k)})'.$$

Exemple 11. Dérivées k-ièmes de $P = X^3 + (1+2i)X^2$ et $Q = (X-a)^n$, $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 3. Formule de Taylor Si $n \in \mathbb{N}$, et $P \in \mathbb{K}_n[X]$ alors

$$\forall a \in \mathbb{K}, \quad P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

Exemple 12. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $(X-a)^2$.

Théorème 4. $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ ssi pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$,

$$P^{(k)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

Exemple 13. Déterminer la multiplicité de la racine 1 de $P = X^4 - X^3 - 7X^2 + 13X - 6$.

3 Décomposition en produit de facteurs irréductibles

3.1 Polynômes irréductibles

Définition 11. $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit **irréductible** si P est non constant et ses seuls diviseurs sont les polynômes constants non nuls et les λP, où $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Théorème 5. de d'Alembert-Gauss - admis

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe.

Propriété 6. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Lemme 1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant.

Si α est une racine complexe non réelle de P de multiplicité m, alors $\overline{\alpha}$ aussi.

Propriété 7. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.

3.2 Décomposition en irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$

Théorème 6. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant s'écrit $P = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k}$,

où λ est le coefficient dominant de P, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont les racines complexes distinctes de P, de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_p$.

De plus, cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Remarque : Dans cette décomposition, $m_1 + \cdots + m_p = \deg(P)$.

Exemple 14. Décomposer P en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$:

a) $P = 4X^4 - 4X^3 - 2X^2 + 2$ b) $P = X^4 + 1$ c) $P = X^n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 7. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant s'écrit $P = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{l=1}^{q} (X^2 + \beta_l X + \gamma_l)^{r_l}$,

où λ est le coefficient dominant de P, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont les racines réelles distinctes de P de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_p$, et $\beta_1, \ldots, \beta_q, \gamma_1, \ldots, \gamma_q \in \mathbb{R}$, $r_1, \ldots, r_q \in \mathbb{N}^*$.

De plus, cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Remarque : Dans cette décomposition, les polynômes $X^2 + \beta_l X + \gamma_l$ de degré 2 ont des discriminants strictements négatifs, et $m_1 + \cdots + m_p + 2r_1 + \cdots + 2r_q = \deg(P)$.

Exemple 15. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$:

a) $P = X^4 - X^3 - 7X^2 + 13X - 6$ b) $P = 4X^4 - 4X^3 - 2X^2 + 2$ c) $P = X^4 + 1$.

3.3 Somme et produit des racines

Propriété 8. Si $P = a_n(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n)$ est scindé de degré $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \times \cdots \times \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Remarque : Les scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les racines de P comptées avec multiplicités.

Exemple 16. Somme et produit des racines de $P = 5X^7 - 2X^6 + X^4 - 3X^2 + X - 13$.

4 Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles

Définition 12. On appelle **fraction rationnelle** tout quotient de la forme $F = \dfrac{A}{B}$ où A et B sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. L'ensemble des fractions rationnelles est noté $\mathbb{K}(X)$.

Proposition 1. Soient A et B des polynômes de $\mathbb{K}[X]$, et $F = \dfrac{A}{B}$

$\exists!(\mathrm{Q}, \mathrm{R}) \in (\mathrm{K}[\mathrm{X}])^2$ tel que $\mathrm{F} = \mathrm{Q} + \dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{B}}$ avec $\deg(\mathrm{R}) < \deg(\mathrm{B})$.

Q est appelée **partie entière** de F, $\dfrac{R}{B}$ est appelée **partie fractionnaire** de F.

Exemple 17. Déterminer les parties entières et fractionnaires de $\mathrm{F} = \dfrac{X^2 - 5X + 4}{X - 2}$ et $\mathrm{G} = \dfrac{X^4 + 2X^2 + X + 1}{X^2 + 1}$

Définition 13. On appelle **élément simple** un quotient de polynôme $F = \dfrac{P}{Q^n}$ où Q est un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X], n \in \mathbb{N}^*$ et $\deg(P) < \deg(Q)$.

Remarques 1) Dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, on a nécessairement $\deg(\mathrm{Q}) = 1$ et P constant.

2) Dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$: Soit $\deg(\mathrm{Q}) = 1$ et $F = \dfrac{P}{Q^n}$ est dit élément simple de $\mathbf{1}^{\text{ère}}$ espèce (P constant)

Soit $\deg(Q) = 2$ et $F = \dfrac{P}{Q^n}$ est dit élément simple de $2^{\text{ème}}$ espèce $(P = aX + b)$

Définition 14. **Décomposer** une fraction rationnelle $F = \mathrm{Q} + \dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{B}}$ **en éléments simples** dans $\mathbb{K}(\mathrm{X})$ consiste à écrire la partie fractionnaire de F comme somme d'éléments simples dans $\mathbb{K}(\mathrm{X})$. Les dénominateurs de ces éléments simples sont les facteurs irréductibles de B dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ mis à la puissance i pour tout i entre 1 et n où n est la puissance de ce facteur irréductible dans la factorisation de B.

Exemple 18. Décomposer en éléments simples les fractions suivantes.

1 . Dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$: $\mathrm{F} = \dfrac{1}{X(X+1)}$ $\quad \mathrm{G} = \dfrac{1}{X^2+1}$ $\quad \mathrm{H} = \dfrac{X^3}{X^2-4}$

2. Dans $\mathbb{R}[X]$: $\mathrm{F} = \dfrac{X^3}{X^2+1}$ $\quad \mathrm{G} = \dfrac{1}{(X^2+2)(X-1)}$