DS - fev 25 - PTSI

Ex1 1) Appliquons la méthode de Gauss-Jordan

$$(M|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 1&0&2&0&0&1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&2&0&0&1\\ 0&1&0&0&1&0\\ 2&0&1&1&0&0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&2&0&0&1\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&-3&1&0&-2 \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&2&0&0&1\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3} \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Par suite <u>M est inversible</u> et $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2&0&-1\\ 0&3&0\\ -1&0&2 \end{pmatrix}}$

2) $MX = X$ est représenté matriciellement par $M-I$. Appliquons la méthode du pivot de Gauss.

$$M - I = \begin{pmatrix} 1&0&1\\ 0&0&0\\ 1&0&1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1&0&1\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}. \text{ D'où } \begin{cases} x = -q \\ y = p \\ z = q \end{cases}, \ p,q \in \mathbb{R}$$

Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{S}_{(S_1)}$ des solutions de (S_1) est $\boxed{\mathcal{S}_{(S_1)} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}}$

3) $MX = 3X$ est représenté matriciellement par $M-3I$. Appliquons à nouveau la méthode du pivot.

$$M - 3I = \begin{pmatrix} -1&0&1\\ 0&-2&0\\ 1&0&-1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1&0&-1\\ 0&-2&0\\ 1&0&-1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1&0&-1\\ 0&-2&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1&0&-1\\ 0&1&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}. \text{ D'où } \begin{cases} x = p \\ y = 0 \\ z = p \end{cases}, \ p \in \mathbb{R}$$

L'ensemble des solutions de (S_3) est $\boxed{\mathcal{S}_{(S_3)} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}}$

4) A priori <u>$J^n = 2^{n-1} J \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$</u>.

Posons $\mathcal{P}_n$ la propriété : " $J^n = 2^{n-1} J$ ".

$J^1 = J = 2^0 J = 2^{1-1} J$ d'où $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Si $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors $J^{n+1} = J J^n = J \cdot 2^{n-1} J = 2^{n-1} J^2$

or $J^2 = 2J$. D'où $J^{n+1} = 2^{n-1} 2 J = 2^{n+1-1} J$ et $\underline{\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}}$

Par suite $\underline{\mathcal{P}_n \text{ est bien vraie } \forall n \in \mathbb{N}^*}$

5) $M^n = (1+J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k 1^{n-k} = \underset{k=0}{\underset{\uparrow}{1^n}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} J^k$

d'où $M^n \overset{4)}{=} 1 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1}\right) J$.

Or $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k\right) - 1\right]$

B.N

$= \frac{1}{2}\left[3^n - 1\right]$.

Ainsi $\boxed{M^n = 1 + \frac{3^n-1}{2} J, \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

6) $(P|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$

$\underline{P \text{ est donc inversible}}$ et $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

7) $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$

$\underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{P^{-1}M} \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D}$

D est bien une diagonale. On a $\boxed{D^n = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

8) $D^n \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3^n\end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix} = P^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&3^n\\0&1&0\\-1&0&3^n\end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ PD^n}} \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^n&0&3^n-1\\0&2&0\\3^n-1&0&3^n+1\end{pmatrix} = PD^nP^{-1}$$

D'où $PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{3^n+1}{2}&0&\frac{3^n-1}{2}\\0&1&0\\\frac{3^n-1}{2}&0&\frac{3^n+1}{2}\end{pmatrix} = I + \frac{3^n-1}{2}J$

Notre calcul du 5) est donc cohérent avec ceux des 6|7).

9) Avec $n=-1$ on obtient de la formule pour M^n :

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}-1\\0&2&0\\\frac{1}{3}-1&0&\frac{1}{3}+1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}&0&-\frac{2}{3}\\0&2&0\\-\frac{2}{3}&0&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}\\0&1&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&3&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$$

ce qui est cohérent avec notre résultat du 1).

Ex2 1) $D_\varphi =]0,1[\cup]1,+\infty[$

2) $\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}$ d'où $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = (\ln x)'|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1$

et $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \varphi(x) = 1 \times 1 = 1}$

Par croissance comparée, on sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0^-$

D'où $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \frac{0^-}{-1} = 0^+}$

3) Comme produit de fonctions dérivables, $x\ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. D'où $\varphi(x) = \frac{x\ln x}{x-1}$, comme quotient de fonctions dérivables, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

Ainsi <u>$\tilde{\varphi}$ est dérivable sur D_φ</u>.

4) $\frac{\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(0)}{x-0} = \frac{\ln x}{x-1}$. Par suite, puisque $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tilde{\varphi}(x)-\tilde{\varphi}(0)}{x-0} = +\infty$. Donc <u>$\tilde{\varphi}$ n'est pas dérivable en 0^+</u>

Néanmoins on a que Γ <u>admet une tangente verticale au point d'abscisse 0</u>.

5) (i) Puisque $1-t^2 = (1-t)(1+t) \leq 1$ il en résulte que

$1-t \leq \frac{1}{1+t}$ $\forall\, t > -1$ d'où <u>$0 \leq \frac{1}{1+t} - (1-t)$, $\forall\, t > -1$.</u>

D'autre part, si $t \geq -\frac{1}{2}$ alors $1+t \geq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1+t} \leq 2$

d'où $\frac{t^2}{1+t} \leq 2t^2$ soit $\frac{t^2-1+1}{1+t} = \frac{1}{1+t} + \frac{(t-1)(t+1)}{1+t}$

<u>$= \frac{1}{1+t} - (1-t) \leq 2t^2$, $\forall\, t \geq -\frac{1}{2}$</u>

Ainsi, $\boxed{\forall\, t \geq -\frac{1}{2},\quad 0 \leq \frac{1}{1+t} - (1-t) \leq 2t^2}$

(ii) On déduit de (i) et de la positivité de l'intégrale que :

<u>si $x \geq 0$</u> $\quad 0 \leq \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} - (1-t)\right) dt \leq \int_0^x 2t^2\, dt$

soit $\quad 0 \leq \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \leq 2\frac{x^3}{3}$

<u>si $-\frac{1}{2} \leq x < 0$</u> $\quad \int_0^x 2t^2\, dt \leq \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} - (1-t)\right) dt \leq 0$

soit $\frac{2x^3}{3} \leq \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \leq 0$.

Il vient que, $\boxed{\forall\, x \geq -\frac{1}{2} \qquad \left|\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right| \leq \frac{2}{3}|x|^3}$.

6) $\dfrac{\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(1)}{x-1} = \dfrac{\frac{x\ln x}{x-1} - 1}{x-1} = \dfrac{x\ln x - (x-1)}{(x-1)^2}$

Posons $x = 1+h$. Alors $\dfrac{\tilde{\varphi}(1+h) - \tilde{\varphi}(1)}{h} = \dfrac{(1+h)\ln(1+h) - h}{h^2}$

$= \dfrac{\ln(1+h)}{h} + \dfrac{\ln(1+h) - h}{h^2} = \dfrac{\ln(1+h)}{h} + \dfrac{\ln(1+h) - h + \frac{h^2}{2}}{h^2} - \dfrac{h^2}{2h^2} \quad (*)$

Mais d'après 5 ii) et le théorème des gendarmes,
$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h) - h + \frac{h^2}{2}}{h^2} = 0$.

Aussi on sait que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$ (taux de variation du logarithme népérien au point 1 tend vers son nombre dérivé en 1).

Par suite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\tilde{\varphi}(1+h) - \tilde{\varphi}(1)}{h} = 1 + 0 - \frac{1}{2}$ d'après $(*)$

On en déduit que $\tilde{\varphi}$ est dérivable en 1 et $\boxed{\tilde{\varphi}'(1) = \frac{1}{2}}$

Δ a pour équation $y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$

soit $\boxed{\Delta : y = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}}$

7) a) $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$ d'où la concavité du logarithme népérien. Il s'en suit que sa droite tangente au point d'abscisse 1 est au dessus de son graphe

i.e. $\quad \ln(x) \leq x - 1 \quad , \forall x > 0$

b) $\varphi'(x) = \dfrac{(\ln x + 1)(x-1) - x\ln x}{(x-1)^2} = \dfrac{x - 1 - \ln x}{(x-1)^2} \geq 0$

d'après 7a). Puisque $\varphi(x) = \dfrac{x\ln x}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \dfrac{\ln x}{1 - \frac{1}{x}}$ on a

$\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi(x) = +\infty$ et

x	0		1		$+\infty$
$\tilde{\varphi}'(x)$	$+\infty$	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	
$\tilde{\varphi}(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

8) $\tilde{\varphi}$ est strictement croissante et continue définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ = \operatorname{Im}\tilde{\varphi}$. Elle réalise donc une bijection continue $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (cf. 7)b))

Aucune dérivée de $\tilde{\varphi}'$ est nulle. Par suite $\tilde{\varphi}^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $(\tilde{\varphi}^{-1})'(0)=0$. $\boxed{(\tilde{\varphi}^{-1})'(1) = \frac{1}{\tilde{\varphi}'(1)} = 2}$

puisque $\tilde{\varphi}(1)=1$.

9) $\tilde{\varphi}(x) - \ln x \overset{x>1}{=} \frac{x\ln x}{x-1} - \ln x = \frac{x\ln x - (x-1)\ln x}{x-1} = \frac{\ln x}{x-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$

D'après les croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

d'où $\lim_{x\to+\infty} \tilde{\varphi}(x) - \ln x = 0^+$.

$\boxed{\text{Le graphe du logarithme népérien est donc asymptote à } \Gamma \text{ en } +\infty}$.