DS de Mathématiques
Le samedi 1 février 2025

Indiquez votre nom et votre classe sur vos copies et emboîtez ses feuillets dans le bon ordre de lecture.
Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice n°1 (Calcul matriciel)

(**10 pts** : **1)** 1 **2)** 1.5 **3)** 1.5 **4)** 0.5+0.5 **5)** 1.5 **6)** 0.5+0.5 **7)** 0.5+0.5 **8)** 1 **9)** 0.5)

Posons $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

1) Montrer que M est inversible et calculer son inverse M^{-1}.

2) Résoudre le système linéaire (S_1) $MX=X$ d'inconnues réelles x,y,z.

3) Résoudre le système linéaire (S_3) $MX=3X$ d'inconnues réelles x,y,z.

4) Conjecturer l'expression de J^n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Vérifier votre conjecture par récurrence.

5) En déduire M^n pour tout entier n, en remarquant que $M=I+J$ et en appliquant la formule du binôme de Newton (on précisera les détails utiles de son calcul).

6) Soit $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan.

7) Posons $D=P^{-1}MP$. Calculer D pour observer qu'il s'agit d'une matrice diagonale. Expliciter alors D^n.

8) Sachant que $M^n=PD^nP^{-1}$ vérifier votre calcul de la question **5)** à partir des questions **6)7)**.

9) Il s'avère que la formule des questions **5)** et **8)** est également valide pour $n\in\mathbb{Z}$. Est-ce cohérent avec votre résultat de la question **1)**?

Exercice n°2 (Limites & dérivabilité)

(**10 pts** : **1)** 0.5 **2)** 0.5+1 **3)** 0.5 **4)** 1+0.5 **5)** 0.5+0.5 **6)** 1+0.5 **7)** 0.5+0.5 **8)** 0.5+0.25+0.25 **9)** 0.5+1)

Soit $\varphi(x) = \frac{x \ln(x)}{x-1}$.

1) Quel est le domaine de définition D_φ de la fonction φ?

2) Quelle est la limite de φ(x) en 0^+? Montrer que φ admet une limite en 1.

3) D'après **2)** φ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$. Notons $\tilde{\varphi}$ ce prolongement. Pourquoi $\tilde{\varphi}$ est-elle nécessairement dérivable sur D_φ?

4) Étudier la dérivabilité de $\tilde{\varphi}$ en 0^+. Que peut-on en déduire du graphe Γ de $\tilde{\varphi}$?

5) Afin d'étudier la dérivabilité de $\tilde{\varphi}$ en 1 montrer:

(i) montrer que $\forall\, t \geqslant -\frac{1}{2},\ 0 \leqslant \frac{1}{1+t} - (1-t) \leqslant 2\,t^2$

(ii) puis que $\forall\, x \geqslant -\frac{1}{2},\ \left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right| \leqslant \frac{2}{3}\,|x|^3$

6) Déduire du **5)**(ii) que $\tilde{\varphi}$ est dérivable en 1. Donner une équation cartésienne de la droite Δ tangente à Γ au point d'abscisse 1.

7) a) Montrer que le logarithme népérien est concave. Pourquoi peut-on en déduire l'inégalité $\ln(x) \leqslant x - 1$ pour tout $x > 0$. **b)** Construire le tableau de variations de $\tilde{\varphi}$.

8) Montrer que $\tilde{\varphi}$ réalise une bijection continue de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans un intervalle à déterminer. Sur quel ensemble $\tilde{\varphi}^{-1}$ est-elle dérivable? Que vaut $\tilde{\varphi}^{-1}(1)$?

9) Prouver que le graphe du logarithme népérien est asymptote au graphe Γ de $\tilde{\varphi}$ en $+\infty$. Tracer Γ en représentant toutes les informations obtenues.