

Correction École Ouverte PCSI-PTSI

1 Matrices

Exercice 1 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Par le calcul on trouve que $U^2 = U$. Démontrons que $\forall k \in \mathbb{N}^*, U^k = U$.

La propriété est vraie au rang 1 et si $U^k = U$ à un rang $k \in \mathbb{N}^*$ (HR), alors on a :
 $U^{k+1} = U^k U = U U = U^2 = U$ et la propriété est vraie au rang $k + 1$.

Par récurrence, on a $U^k = U$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Cette égalité est fautive pour $k = 0$ car $U^0 = I_3 \neq U$.

(b) I_3 et U commutent donc, par la formule du binôme, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (I_3 + U)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I_3^{n-k} U^k.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(I_3 + U)^n = I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} U = I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \right) U$.

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 2^n - 1 \text{ et } A = I_3 + U \text{ donc } A^n = I_3 + \lambda_n U, \text{ avec } \lambda_n = 2^n - 1.$$

$\lambda_0 = 0$ et $A^0 = I_3$ donc la formule est encore vraie pour $n = 0$.

2. (a) Par le calcul on trouve que $A^2 = 3A - 2I_3$.

(b) Donc $A(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3) = (-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3)A = I_3$.

$$\text{Donc } A \text{ est inversible d'inverse } A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Démontrons cette propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

— $A^0 = a_0 A + b_0 I_3$ où $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. La propriété est vraie au rang 0.

— Supposons qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$. (HR)

$$A^{n+1} = AA^n \underset{\text{(HR)}}{=} A(a_n A + b_n I_3) = a_n A^2 + b_n A I_3 \underset{2.(a)}{=} a_n (3A - 2I_3) + b_n A.$$

Donc $A^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} I_3$ avec $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$ et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, A^n = a_n A + b_n I_3$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, on a les relations $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et

$$b_{n+1} = -2a_n.$$

Remplaçons n par $n + 1$ dans la première relation : $a_{n+2} = 3a_{n+1} + b_{n+1}$. Avec la deuxième relation on obtient alors $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$.

(a_n) est une SRL2 d'équation caractéristique $q^2 - 3q + 2 = 0$, de racines évidentes $q_1 = 1$ et $q_2 = 2$.

Donc il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = C_1 \times 1^n + C_2 \times 2^n = C_1 + 2^n C_2$.

De plus, $a_0 = 0$, $a_1 = 3a_0 + b_0 = 3 \times 0 + 1 = 1$ et

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 2C_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^n - 1$.

Si $n \geq 0$, $b_{n+1} = -2a_n$ donc si $n \geq 1$, $b_n = -2a_{n-1} = -2(2^{n-1} - 1) = -2^n + 2$, ce qui est encore vrai pour $n = 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = 2 - 2^n$.

$$(e) A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3 = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n - 2 & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2 - 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 2^n \end{pmatrix}.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et pour $n = -1$ on retrouve bien A^{-1} .

3. (a) Par le calcul, on trouve $P^2 = I_3$. Donc P est inversible d'inverse $P^{-1} = P$.

(b) Par le calcul, on trouve $PDP = A$.

(c) D est une matrice diagonale inversible car ses coefficients diagonaux sont non nuls.

On en déduit que A est inversible, comme produit de matrices inversibles, et on a :

$$A^{-1} = P^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P.$$

(d) Démontrons d'abord cette propriété par récurrence sur \mathbb{N} .

— $A^0 = I_3$ et $PD^0P = PI_3P = P^2 = I_3$ donc la propriété est vraie au rang 0.

— Supposons que $A^n = PD^nP$ à un rang $n \in \mathbb{N}$ (HR). Donc

$$A^{n+1} = A^n A \stackrel{\text{(HR)}}{=} PD^n PPDP = PD^n I_3 DP = PD^{n+1}P \text{ et la propriété est vraie au rang } n + 1.$$

Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $A^{-n} = (A^n)^{-1} = (PD^nP)^{-1} = P^{-1}D^{-n}P^{-1} = PD^{-n}P$.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{Z}, A^n = PD^nP}$ et on a :

$$A^n = PD^nP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Exercice 2

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. On applique l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice augmentée de (S) :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 & 1-m \\ m & -m^2 & 1 & 2 \\ 1 & -m & 1 & m^2+1 \end{array} \right) \underset{\sim}{L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & 1 & 2 \\ 0 & 1+m^2 & -1-m & 1-3m \\ 0 & 0 & 1-m & 2(1-m) \\ 0 & 0 & 0 & m^2-1 \end{array} \right),$$

par les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - mL_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$.

Si $m \notin \{-1, 1\}$, le système (S) est incompatible et l'ensemble des solutions est $S = \emptyset$.

2. Si $m = 1$, en effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$ et $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, on a :

$$(A|B) \underset{\sim}{L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \underset{\sim}{L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ et } (S) \iff \begin{cases} x = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}.$$

Dans ce cas, le système (S) est de rang 2, d'inconnues principales x et y , et de paramètre z . Il admet une infinité de solutions et $\boxed{S = \{(1, -1 + z, z), z \in \mathbb{R}\}}$.

Si $m = -1$, en effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$, $L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$,

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, on a :

$$(A|B) \underset{\sim}{L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \underset{\sim}{L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ et } (S) \iff \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Dans ce cas, le système (S) est de rang 3, d'inconnues principales x , y et z . Il admet une unique solution et $\boxed{S = \{(-2, 2, 2)\}}$.

$$\text{Exercice 3} \quad (S_{a,b}) : \begin{cases} x + y + az = 1 & L_1 \\ ax + (a-1)y + z = 1 & L_2 \\ x + y + z = b+1 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + y + z = b+1 & L_3 \rightarrow L_1 \\ (a-1)z = -b & L_1 - L_3 \rightarrow L_2 \\ -y + (1-a)z = 1-ab-a & L_2 - aL_3 \rightarrow L_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\text{Si } a \neq 1} \begin{cases} z = \frac{b}{1-a} \\ y = b-1+ab+a & -(L_2 + L_3) \\ x = 2-ab-a - \frac{b}{1-a} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Si } a = 1} (S_{1,b}) : \begin{cases} x + y + z = 1 & L_1 \\ x + z = 1 & L_2 \\ x + y + z = b+1 & L_3 \end{cases}$$

$$\text{Si de plus } b+1 = 1 \Leftrightarrow b = 0 \text{ alors } (S_{1,0}) : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \text{ et si } b \neq 0 \text{ alors } S = \emptyset$$

Conclusion $(S_{a,b})$ est compatible pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ sauf si $a = 1$ et $b \neq 0$

Si $a \neq 1$ alors l'ensemble des solutions est un point de coordonnées

$$\left(2-a-ab-\frac{b}{1-a}, b-1+ab+a, \frac{b}{1-a}\right)$$

Si $a = 1$ et $b = 0$ alors l'ensemble des solutions est une droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 0, \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2 Continuité

$$\text{Exercice 1} \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x - 1) = 4$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \text{ donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3x - 1}{x-1} = +\infty} \text{ par produit}$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \text{ donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 3x - 1}{x-1} = -\infty} \text{ par produit}$$

b) $\frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 8}$ en -2 le numérateur et le dénominateur sont nuls, donc on peut simplifier la fraction par $x+2$:

$$x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3) \text{ et } x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4) \text{ donc } \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 8} = \frac{x-3}{x^2 - 2x + 4} \text{ et}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 8} = -\frac{5}{12}}$$

c) $\ln\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) \frac{2x+1}{x-2}$ est du signe de $(2x+1)(x-2)$ qui est un polynôme du second degré avec deux racines, 2 et $-\frac{1}{2}$

L'ensemble de définition est $] -\infty, -\frac{1}{2}[\cup]2, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 2} (2x+1) = 5$ et $\lim_{x \rightarrow 2_+} (x-2) = 0_+$ donc $\lim_{x \rightarrow 2} \ln\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) = +\infty$ par quotient puis composition.

$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}_-} (2x+1) = 0_-$ et $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}_-} (x-2) = -\frac{5}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}_-} \ln\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) = -\infty$ par quotient puis composition.

d) $\frac{\sqrt{x^2-1}-2x}{x-1}$ est définie sur $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 1_+} \sqrt{x^2-1}-2x = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 1_+} x-1 = 0_+$ donc $\lim_{x \rightarrow 1_+} \frac{\sqrt{x^2-1}-2x}{x-1} = -\infty$ par quotient.

$$\frac{\sqrt{x^2-1}-2x}{x-1} = \frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-2x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} \quad \text{Or pour } x < 0, |x| = -x \text{ donc}$$

$$\frac{\sqrt{x^2-1}-2x}{x-1} = \frac{x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-2\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} \quad \boxed{\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -3}$$

e) $\frac{e^{2x}-e^x+x}{e^x-x} = \frac{x\left(\frac{e^{2x}}{x}-\frac{e^x}{x}+1\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-1\right)} \quad \boxed{\xrightarrow{-1}}$ en $-\infty$ par quotient

$$\frac{e^{2x}-e^x+x}{e^x-x} = \frac{e^{2x}\left(1-e^{-x}+\frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)} \quad \boxed{\xrightarrow{+\infty}}$$
 en $+\infty$ par croissances comparées et quotient

f) $\ln(1+e^x)-x+1 = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)+1 \quad \boxed{\xrightarrow{1}}$ en $+\infty$ par composition et somme

Exercice 2 1. $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus [-1, 0]$ (à justifier) et est continue sur son ensemble de définition.

$$\lim_{x \rightarrow -1_-} f(x) = -\infty \quad \text{par composition et produit}$$

$f(x) = x^2 \ln(x+1) - x^2 \ln x \quad \boxed{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}$ par croissances comparées et somme. (f est prolongeable par continuité à droite en 0)

$$f(x) = x \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \text{et en posant } u = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0 \text{ avec } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1 \text{ on obtient}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{par produit.}$$

2. $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ f est continue sur $]n, n + 1[$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ car $x - [x] \geq 0$ pour tout x et la fonction partie entière y est continue.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = n$ et pour $x \geq n$, $[x] = n$ donc $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n$

Pour $x < n$, $[x] = n - 1$ donc $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n - 1 + 1 = n$

f est alors continue en chaque $n \in \mathbb{Z}$. Finalement, f est continue sur \mathbb{R}

$\forall x \in \mathbb{R}$, $[x] \leq x < [x] + 1 \Leftrightarrow 0 \leq x - [x] < 1$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

par comparaison.

3. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & , x \in]-1, 1[\\ 0 & , x \notin]-1, 1[\end{cases}$. f est continue sur $] - 1, 1[$ car $1 - x^2$ ne s'annule pas sur cet intervalle et f est continue sur $\mathbb{R} \setminus] - 1, 1[$ car elle y est constante.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{1-x^2} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 = f(1) = f(-1)$ donc f

est continue également en 1 et en -1 donc f est continue sur \mathbb{R}

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = e^{(x-1)\ln(\frac{x}{x-1})}$ existe ssi $\frac{x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ou $x > 1$.

Comme la fonction exp est définie sur \mathbb{R} et ln est définie sur $]0; +\infty[$,

$$f \text{ est définie sur } \mathcal{D}_f =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[.$$

2. Sur $] - \infty; 0[$, la fonction $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ est continue (comme fonction rationnelle continue sur son ensemble de définition) à valeurs dans $]0; +\infty[$. Comme la fonction ln est continue sur $]0; +\infty[$, la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ est continue sur $] - \infty; 0[$ comme composée de fonctions continues. Comme les fonctions exp et $x \mapsto x - 1$ sont continues sur \mathbb{R} , $x \mapsto (x - 1) \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ est continue sur $] - \infty; 0[$ comme produit de fonctions continues et f est continue sur $] - \infty; 0[$ comme composée de fonctions continues.

On montre, de même, que f est continue sur $]1; +\infty[$.

Ainsi, f est continue sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

3. (a) $\forall x > 1$, $(x - 1) \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = (x - 1) \ln(x) - (x - 1) \ln(x - 1)$.

$(x - 1) \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 0$, par opérations sur les limites.

$x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 0^+$ et $y \ln(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} 0$, par croissance comparée.

Donc $(x - 1) \ln(x - 1) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 0$, par composition.

Donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 1$ par opérations sur les limites et par composition.

Ainsi, f est prolongeable par continuité (à droite) en 1.

(b) $\frac{x}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0^+$ donc $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty$, par composition.

Par opérations sur les limites et par composition, on obtient :

$$(x-1) \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} +\infty \text{ puis } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} +\infty.$$

Ainsi, f n'est pas prolongeable par continuité (à gauche) en 0.

4. $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = e^{(x-1)\ln(1+\frac{1}{x-1})}$ et $(x-1) \ln\left(1 + \frac{1}{x-1}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x-1}}$.

Or $\frac{1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{\ln(1+y)}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$.

Donc, par composition, on a $(x-1) \ln\left(1 + \frac{1}{x-1}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, puis $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e$.

On montre, de même, que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} e$.

Exercice 4 Pour $x \in \mathcal{D} = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, on pose $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{\ln(x)} & \text{sinon} \end{cases}$

1. $f(0) = 0$ donc 0 est un point fixe de f . Si $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$, alors on a :

$$f(x) = x \iff \frac{x}{\ln(x)} = x \iff x = x \ln(x) \iff 1 = \ln(x) \iff x = e.$$

Donc l'ensemble des points fixes de f est $\{0, e\}$.

2. f est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathcal{D} \setminus \{0\}$, par les théorèmes généraux.

Si $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ alors $f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 = f(0)$, par opérations sur les limites.

Donc f est continue en 0 et sur $\mathcal{D} \setminus \{0\}$, donc f est continue sur \mathcal{D} .

3. Pour $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$, on a :

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} \text{ et } f''(x) = \frac{\ln^2(x) - 2\ln(x)(\ln(x) - 1)}{x \ln^4(x)} = \frac{\ln(x)(2 - \ln(x))}{x \ln^4(x)}.$$

4. Par opérations sur les limites, en 1^\pm , on a :

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -\infty, \quad f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty \text{ et } f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1^\pm} -\infty.$$

Par croissance comparée, en $+\infty$, on a : $f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Par opérations sur les limites, en $+\infty$, on a : $f'(x) = \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln^2(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

5. Pour $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$, $\ln^2(x) > 0$ donc $f'(x) > 0 \iff \ln(x) - 1 > 0 \iff x > e$. D'où

x	0	1	e	$+\infty$			
$f'(x)$	0	-		-	0	+	
$f(x)$	0		$-\infty$		$+\infty$	e	$+\infty$

Pour $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$, $x \ln^4(x) > 0$ donc

$f''(x) > 0 \iff \ln(x)(2 - \ln(x)) > 0 \iff 0 < \ln(x) < 2 \iff 1 < x < e^2$. D'où

x	0	1	e^2	$+\infty$			
$f''(x)$		-		+	0	-	
$f'(x)$	0		$-\infty$		$-\infty$	$\frac{1}{4}$	0

Exercice 5 Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

1. Montrer que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .

$$|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ donc } 0 \leq \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} < 1, \forall x \in \mathbb{R} \text{ et}$$

$$-1 < \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

La fonction arcsinus étant dérivable sur $] -1, 1[$, la fonction f est bien dérivable sur \mathbb{R} .

2. Calculer la dérivée de la fonction f .

$$f' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$u' = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)}$$

$$1-u^2 = 1 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

3. En déduire que $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctan x + C$ pour tout x , $C = 0$ car $f(0) = 0 = \arctan(0)$.

$$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctan x, \forall x \in \mathbb{R}$$

3 Dérivabilité

Exercice 1

1. f est définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\sqrt{x} \leq 1 + |x|$ car $1 + |x| - 2\sqrt{x} = (1 - \sqrt{x})^2 \geq 0$.

La fonction racine étant définie et continue sur \mathbb{R}_+ on a $x \geq 0$ et on obtient $0 \leq \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \leq 1$ avec l'égalité à 1 ssi $x = 1$

La fonction arcsinus étant définie et continue sur $[-1, 1]$,

f est alors définie et continue sur \mathbb{R}_+ par composition.

La fonction racine étant dérivable sur \mathbb{R}_+^* et la fonction arcsinus étant dérivable sur $] - 1, 1[$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus 1$

$$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \text{ avec } u = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}, u' = \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2} \text{ et } 1-u^2 = \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2} \frac{1+x}{|1-x|} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} & x \in]1, +\infty[\\ -\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} & x \in]0, 1[\end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\frac{1}{2}$$

la fonction f n'est ni dérivable en 0, ni dérivable en 1 d'après le théorème de la limite de la dérivée.

Remarque La courbe représentative de f admet en 0 une tangente verticale et en 1 deux demi-tangentes.

2. f est définie par $f(x) = x \arcsin(1-x^2)$
 $-1 \leq 1-x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -2-x^2 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

La fonction arcsinus étant définie et continue sur $[-1, 1]$,

f est alors définie et continue sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ par composition et produit.

$$1-x^2 = \pm 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ ou } x^2 = 2$$

La fonction arcsinus étant dérivable sur

$] - 1, 1[$, la fonction f est dérivable sur $] - \sqrt{2}, 0[\cup]0, \sqrt{2}[$

$$f(0) = 0 \text{ et } \frac{f(x)}{x} = \arcsin(1-x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\pi}{2} \text{ donc la fonction } f \text{ est dérivable en } 0$$

$$f'(x) = \arcsin(1-x^2) + x \times \frac{-2x}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}} = \arcsin(1-x^2) - \frac{2x^2}{\sqrt{2x^2-x^4}} =$$

$$\arcsin(1-x^2) - \frac{2x^2}{|x|\sqrt{2-x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\sqrt{2}} -\infty \text{ donc}$$

la fonction f est dérivable ni en $\sqrt{2}$, ni en $-\sqrt{2}$ d'après le théorème de la limite de la dérivée.

3. f est définie par $f(x) = \cos(\sqrt{x})$. f est définie et continue sur \mathbb{R}_+ , dérivable sur \mathbb{R}_+^* car la fonction racine est définie et continue sur \mathbb{R}_+ mais dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})$$

En posant $u = \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, avec $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$

la fonction f est donc dérivable en 0 d'après le théorème de la limite de la dérivée et f est dérivable sur \mathbb{R}_+

Exercice 2

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi - 2x}}, & \text{si } x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\forall x \in]-\infty, \frac{\pi}{2}[$, $\pi - 2x > 0$. Donc $x \mapsto \sqrt{\pi - 2x}$ est dérivable sur $I =]-\infty, \frac{\pi}{2}[$, comme composée de fonctions dérivables. On en déduit que f est dérivable sur I , comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

Si $x < \frac{\pi}{2}$, on a : $\frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{\cos(x) - \cos(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi - 2x}}$.

$\sqrt{\pi - 2x} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} 0^+$ donc $\frac{1}{\sqrt{\pi - 2x}} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} +\infty$, par opérations sur les limites.

$\frac{\cos(x) - \cos(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos'(\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1$.

Donc $\frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} -\infty$, par opérations sur les limites, et f n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x+a}$, $a \in \mathbb{R}^*$

1. f est de classe C^∞ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ comme inverse d'une fonction C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas.

2. $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! (x+a)^{-n-1} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$ pour tout $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}$.

3. $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$

D'après la question précédente, en prenant $a = 1$ et $a = -1$,

$\left(\frac{1}{x^2 - 1} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2} \left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

4. $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x-1} \times \frac{1}{x+1}$. D'après la formule de Leibniz, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right)^{(n)} &= \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{x-1} \right)^{(k)} \left(\frac{1}{x+1} \right)^{(n-k)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k!(n-k)! (-1)^{k+n-k} \frac{1}{(x-1)^{k+1}} \frac{1}{(x+1)^{n-k+1}} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \binom{n}{k} k!(n-k)!(-1)^{k+n-k} = (-1)^n n! , a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} \text{ avec}$$

$$a = \frac{1}{x-1} \text{ et } b = \frac{1}{x+1} \text{ et } a-b = \frac{2}{(x-1)(x+1)} = 2ab \text{ On obtient}$$

$$\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2} (a-b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} = \frac{(-1)^n n!}{2} (a^{n+1} - b^{n+1}) =$$

$$\frac{(-1)^n n!}{2} \left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right)$$

Exercice 4

1. On reconnaît **le théorème des accroissements finis** en posant $f(x) = \ln(\ln x)$.

f est dérivable sur $]1, +\infty[$ car $\ln x > 0$ sur cet intervalle, donc f est dérivable sur chaque intervalle $[k, k+1]$ pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2.

Il existe donc $c \in [k, k+1]$ tel que $f'(c) = f(k+1) - f(k)$

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln x} \text{ et } k \leq c \leq k+1 \Rightarrow \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \leq f'(c) \leq \frac{1}{k \ln(k)}$$

$$\text{donc } \boxed{\frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \leq \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k \ln(k)}}$$

2. En sommant l'inégalité de droite on obtient $\sum_{k=2}^n \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq u_n$

et en utilisant les sommes télescopiques $\ln(\ln(n+1)) - \ln 2 \leq u_n$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(\ln(n+1)) - \ln 2) = +\infty$ donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$ par comparaison.

Exercice 5 On pose : $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k^2}$.

1. On reconnaît **le théorème des accroissements finis** en posant $f(x) = \arctan x$.

f est dérivable sur \mathbb{R} donc f est dérivable sur chaque intervalle $[a, a+1]$ pour tout

$a \in \mathbb{R}_+$. Il existe donc $c \in [a, a+1]$ tel que $f'(c) = f(a+1) - f(a)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ et } 0 \leq a \leq c \leq a+1 \Rightarrow \frac{1}{1+(a+1)^2} \leq f'(c) \leq \frac{1}{1+a^2}$$

$$\text{donc } \boxed{\frac{1}{1+(a+1)^2} \leq \arctan(a+1) - \arctan(a) \leq \frac{1}{1+a^2}}$$

2. En sommant ces inégalités on obtient

$$\sum_{a=0}^n \frac{1}{1+(a+1)^2} \leq \sum_{a=0}^n (\arctan(a+1) - \arctan(a)) \leq u_n$$

En utilisant les sommes télescopiques et un changement d'indice pour la somme de gauche, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{1+k^2} = u_n - 1 + \frac{1}{1+(n+1)^2} \leq \arctan(n+1) \leq u_n \text{ puis}$$

$$\boxed{\arctan(n+1) \leq u_n \leq \arctan(n+1) + 1 - \frac{1}{1+(n+1)^2} \leq \frac{\pi}{2} + 1}$$

car $\arctan x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\forall x \in \mathbb{R}$

La suite (u_n) est alors croissante, comme somme de termes positifs, et majorée,

elle converge vers un réel ℓ qui vérifie $\frac{\pi}{2} \leq \ell \leq \frac{\pi}{2} + 1$ par passage à la limite dans l'encadrement précédent.

Exercice 6 Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}$

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq e^x \leq e^x + 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{e^x}{e^x + 1} \leq 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, 1]$.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - x$. f est dérivable sur \mathbb{R} car $e^x + 1 \neq 0$ sur \mathbb{R} et

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^{2x}}{(e^x + 1)^2} - 1 = \frac{e^x - (e^x + 1)^2}{(e^x + 1)^2} = -\frac{e^{2x} + e^x + 1}{(e^x + 1)^2} < 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

f étant continue et strictement décroissante sur \mathbb{R} , elle réalise une bijection de \mathbb{R} sur $f(\mathbb{R})$. Or $f(0) = \frac{1}{2} > 0$ et $f(1) = \frac{e}{e+1} - 1 = \frac{-1}{e+1} < 0$

il existe donc un unique $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\frac{e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \alpha$

3. On reconnaît **l'inégalité des accroissements finis**.

Soit $g : x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$. g est dérivable deux fois sur $[0, 1]$ et $g'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

$$g''(x) = \frac{e^x(e^x + 1)^2 - 2e^{2x}(e^x + 1)}{(e^x + 1)^4} = \frac{e^x - e^{2x}}{(e^x + 1)^3} = \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} < 0 \text{ sur } [0, 1] \text{ car } 1 - e^x < 0 \text{ sur } [0, 1].$$

g' est alors décroissante sur $[0, 1]$, avec $g'(0) = \frac{1}{4}$ et $g'(1) > 0$ donc

$$0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{4}, \forall x \in [0, 1]$$

Par l'inégalité des accroissements finis, $\forall x, x' \in [0, 1]$ $|g(x) - g(x')| \leq \frac{|x - x'|}{4}$.

En posant $x = u_n$ et $x' = \alpha$, on a bien $x, x' \in [0, 1]$ d'après les questions précédentes et

on obtient $g(x) = u_{n+1}$, $g(\alpha) = \alpha$ puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$

4. On démontre par récurrence (à faire) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ ce qui équivaut à dire que

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

Exercice 7 Étant donné un nombre réel $a > 0$, on définit la fonction f_a sur \mathbb{R} par $f_a(x) = e^{a(x-1)}$.

On définit alors la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f_a(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

I. Convergence de la suite (u_n)

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $Q_n : "0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1"$.

- $u_0 = 0$ et $u_1 = f_a(0) = e^{-a} \in]0, 1[$ car $a > 0$. Donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$ et Q_0 est vraie.
- Supposons que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ à un rang $n \in \mathbb{N}$ (HR). La fonction f_a est croissante sur \mathbb{R} , comme composée de fonctions croissantes, car $a > 0$. Donc on a :
 $f_a(0) \leq f_a(u_n) \leq f_a(u_{n+1}) \leq f_a(1)$ donc $0 \leq e^{-a} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$ et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Par récurrence, Q_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

(u_n) est croissante à valeurs dans $[0, 1]$.

2. On en déduit que (u_n) converge vers un réel $L(a) \in [0, 1]$, par le théorème de la limite monotone et par passage à la limite.

f_a est continue sur \mathbb{R} , comme composée de fonctions qui le sont, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_a(u_n).$$

Donc $L(a) = f_a(L(a)) = e^{a(L(a) - 1)} > 0$ et par application de la fonction \ln on obtient :

$$\ln(L(a)) = \ln(f_a(L(a))) = a(L(a) - 1) \text{ et donc } aL(a) - \ln(L(a)) - a = 0.$$

$L(a)$ est une solution de (E) et le nombre 1 est une solution évidente de (E) .

II. Nombre de solutions de (E)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $g_a(x) = ax - \ln(x) - a$ existe ssi $x > 0$. Donc $D = \mathbb{R}_+^*$. De plus,

g_a est continue (et même dérivable) sur D , comme somme de fonctions qui le sont.

2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'_a(x) = a - \frac{1}{x}$ et $g'_a(x) > 0 \iff a > \frac{1}{x} \iff \frac{1}{a} < x$, car $a, x > 0$.

$g_a(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$, par opérations sur les limites.

En $+\infty$, $g_a(x) = x \left(a - \frac{\ln x}{x} \right) - a \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, par croissance comparée et opérations sur les limites, car $a > 0$.

$g_a\left(\frac{1}{a}\right) = 1 + \ln a - a$. D'où le tableau de variation :

x	0	$\frac{1}{a}$	$+\infty$
$g'_a(x)$		-	0
$g_a(x)$		$+\infty$	$+\infty$
		$1 + \ln a - a$	

3. Cas $a = 1$. En remplaçant a par 1, on obtient le tableau de variation de g_1 :

x	0	1	$+\infty$
$g_1'(x)$		-	0 +
$g_1(x)$		$+\infty$	0 \rightarrow $+\infty$

D'après ce tableau de variation, l'équation $g_1(x) = 0$ a pour unique solution 1.

Si $a = 1$, $(E) \iff g_1(x) = 0$ et $L(1)$ est solution de (E) .

Donc (E) a pour unique solution 1 et $L(1) = 1$.

4. **Cas $a \neq 1$.** On suppose dans cette question que $a \neq 1$.

(a) D'après le tableau de variation de g_1 , $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x - \ln(x) - 1 > 0$.

Donc, si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, alors $a - \ln(a) - 1 > 0$ et $1 + \ln a - a < 0$.

(b) g_a est continue, strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{a}[$ et strictement croissante sur $]\frac{1}{a}, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, g_a réalise une bijection de $]0, \frac{1}{a}[$ sur l'intervalle $g_a(]0, \frac{1}{a}[) =]1 + \ln a - a, +\infty[$ et g_a réalise une bijection de $]\frac{1}{a}, +\infty[$ sur l'intervalle $g_a(]\frac{1}{a}, +\infty[) =]1 + \ln a - a, +\infty[$ qui contient 0, d'après la question précédente.

Dans ce cas, l'équation $g_a(x) = 0$, et donc (E) , admet exactement deux solutions : l'une, notée $r(a)$, appartenant à $]0, \frac{1}{a}[$ et l'autre appartenant à $]\frac{1}{a}, +\infty[$.

III. Évaluation de $L(a)$ si $0 < a < 1$. On suppose dans cette partie que $0 < a < 1$.

1. On sait que (E) admet exactement une solution dans $]0, \frac{1}{a}[$, notée $r(a)$.

Si $0 < a < 1$ alors $1 \in]0, \frac{1}{a}[$ et 1 est une solution de (E) . Donc, dans ce cas, $r(a) = 1$.

2. Un passage à la limite dans l'inégalité $u_n \leq 1$ donne $L(a) \leq 1$. Or $1 = r(a)$ est la plus petite solution de (E) et $L(a)$ est une solution de (E) . Donc

si $0 < a < 1$ alors $L(a) = 1$.

IV. Évaluation de $L(a)$ si $a > 1$. On suppose dans cette partie que $a > 1$.

1. (a) On sait que $r(a) \in]0, \frac{1}{a}[$. Or $a > 1$ entraîne $\frac{1}{a} < 1$ donc $r(a) \in]0, 1[$.

$r(a)$ est une solution de (E) donc $ar(a) - a = \ln(r(a))$.

En appliquant l'exponentielle, on a : $f_a(r(a)) = e^{ar(a)-a} = r(a)$.

(b) On procède par récurrence.

— $r(a) > 0$ et $u_0 = 0$ donc $u_0 \leq r(a)$. La propriété est vraie au rang 0.

— Supposons que $u_n \leq r(a)$ à un rang $n \in \mathbb{N}$ (HR).

En appliquant la fonction croissante f_a , on obtient :

$$u_{n+1} = f_a(u_n) \leq f_a(r(a)) = r(a), \text{ d'après la question précédente.}$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq r(a)}$.

(c) Par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient $L(a) \leq r(a)$.

$L(a)$ est une solution de **(E)** et $r(a)$ est la plus petite solution de **(E)** donc

$$\boxed{L(a) = r(a)}.$$

2. (a) f_a est dérivable sur \mathbb{R} , par les théorèmes généraux, et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'_a(x) = ae^{a(x-1)} = af_a(x) > 0.$$

f_a est croissante sur \mathbb{R} donc $\forall x \in \left[0, \frac{1}{a}\right]$, $|f'_a(x)| = af_a(x) \leq af_a\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{a}{e^{a-1}}$.

Par l'I.A.F. on a bien $\boxed{\forall (x, x') \in \left[0, \frac{1}{a}\right]^2, |f_a(x) - f_a(x')| \leq \frac{a}{e^{a-1}} |x - x'|}$.

(b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - L(a)| \leq \left(\frac{a}{e^{a-1}}\right)^n$.

— $u_0 = 0$ et $L(a) = r(a) \in]0, 1[$ donc $|u_0 - L(a)| \leq 1 = \left(\frac{a}{e^{a-1}}\right)^0$.

La propriété est vraie au rang 0.

— Supposons qu'elle soit vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ (HR). D'après **I. 1.** et **IV. 1.(b)** et

(c), $0 \leq u_n \leq L(a) \leq \frac{1}{a}$. Donc, d'après **IV. 1.(a)** et 2.(a), on a :

$$|u_{n+1} - L(a)| = |f_a(u_n) - f_a(L(a))| \leq \frac{a}{e^{a-1}} |u_n - L(a)| \stackrel{\text{(HR)}}{\leq} \left(\frac{a}{e^{a-1}}\right)^{n+1},$$

car $\frac{a}{e^{a-1}} > 0$. La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - L(a)| \leq \left(\frac{a}{e^{a-1}}\right)^n}$.

(c) $\frac{a}{e^{a-1}} = e^{\ln a - a + 1}$ Or $\ln a - a + 1 < 0$ pour tout $a > 0$ d'après 4.(a), d'où

$$0 < \frac{a}{e^{a-1}} < 1. \text{ Donc } \boxed{\left(\frac{a}{e^{a-1}}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}.$$

4 Polynômes

Exercice 1

1. $A = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 1, B = X^2 + X + 1$

$$Q = X^2 - 4X + 7 \text{ et } R = -3x - 8$$

2. $A = 26X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1, B = 2X^3 - X^2 - X + 1$

$$Q = 13X + \frac{25}{2} \text{ et } R = \frac{29X^2 - 5X - 23}{2}$$

3. $A = X^{n+2} + X^{n+1} - X^n = X^n(X^2 + X - 1), B = X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(X^2 + X - 1)$

donc $A = B \frac{X^n}{X - 1}$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} X^k = \frac{X^n - 1}{X - 1}$ donc $\frac{X^n}{X - 1} = Q + \frac{1}{X - 1}$ avec

$$Q = \sum_{k=0}^{n-1} X^k \text{ et } R = \frac{B}{X - 1} = X^2 + X - 1$$

Exercice 2 1. $z^5 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ On pose $z = re^{i\theta}$

$$z^5 = 1 + i \Leftrightarrow r^5 e^{5i\theta} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^5 = 2^{\frac{1}{2}} \\ 5\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2^{\frac{1}{10}} \\ \theta = \frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ 2^{\frac{1}{10}} e^{i\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right)}, k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket \right\}$$

2. $z^8 + z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + Z + 1 = 0$ avec $Z = z^4 \Leftrightarrow Z = j$ ou $Z = \bar{j} \Leftrightarrow z^4 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ou $z^4 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

$$S = \left\{ e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)}, e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)}, k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket \right\}$$

3. $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 4z + 5)^2 = i^2(z + 1)^2$

$$\Leftrightarrow z^2 - 4z + 5 = i(z + 1) \text{ ou } z^2 - 4z + 5 = -i(z + 1)$$

$$\Leftrightarrow z^2 - (4 + i)z + 5 - i = 0 \text{ ou } z^2 + (i - 4)z + 5 + i = 0$$

$$\Delta_1 = -5 + 12i = (x + iy)^2 \text{ ou } \Delta_2 = \overline{\Delta_1}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ 2ixy = 12i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \\ xy > 0 \end{cases}$$

$$\Delta_1 = (2 + 3i)^2 \text{ et } \Delta_2 = (2 - 3i)^2 \quad S = \{3 + 2i, 3 - 2i, 1 - i, 1 + i\}$$

4. $(z + 1)^3 - (z - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow Z^3 = 1$ où $Z = \frac{z + 1}{z - 1}$ avec $z \neq 1 \Leftrightarrow Z = a$ où $a = 1, j, \bar{j}$

On résout $\frac{z + 1}{z - 1} = a, z \neq 1 \Leftrightarrow z = \frac{1 + a}{a - 1}$ pour $a \neq 1$ $S = \left\{ \frac{1 + j}{j - 1}, \frac{1 + \bar{j}}{\bar{j} - 1} \right\}$

Exercice 3 Soit $P = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$.

1. $X^4 - 6X^3 + 9X^2 = X^2(X^2 - 6X + 9) = X^2(X - 3)^2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

$$2. P = X^2(X-3)^2 + 9 = [X(X-3) + 3i][X(X-3) - 3i] =$$

$$\boxed{(X^2 - 3X + 3i)(X^2 - 3X - 3i)}$$

$$P =$$

$$\left(X - \frac{1}{2}(3 - (2-i)\sqrt{3})\right) \left(X - \frac{1}{2}(3 + (2-i)\sqrt{3})\right) \left(X - \frac{1}{2}(3 - (2+i)\sqrt{3})\right) \left(X - \frac{1}{2}(3 + (2+i)\sqrt{3})\right)$$

dans $\mathbb{C}[X]$

$$\boxed{P = (X^2 - (3 - 2\sqrt{3})X + 24 + 12\sqrt{3})(X^2 - (3 + 2\sqrt{3})X + 24 - 12\sqrt{3}) \text{ dans } \mathbb{R}[X].}$$

Exercice 4 Soit $P = (1+X)^5 - (1-X)^5$.

1. En utilisant la formule du binôme de Newton pour $(1+X)^5$ et pour $(1-X)^5$, on constate que les puissances paires de X dans P ont un coefficient nul et on obtient

$$P = 2(X^5 + 10X^3 + 5X) = \boxed{2X(X^4 + 10X^2 + 5)}.$$

2. $X^2 + 10X + 5 = 0 \Leftrightarrow X = -5 + 2\sqrt{5}$ ou $X = -5 - 2\sqrt{5}$

$$\text{Puis } X^2 = -5 + 2\sqrt{5} < 0 \Leftrightarrow X = i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \text{ ou } X = -i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \text{ et}$$

$$X^2 = -5 - 2\sqrt{5} < 0 \Leftrightarrow X = i\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \text{ et } X = -i\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

$$\boxed{P = 2X(X - i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}})(X + i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}})(X - i\sqrt{5 + 2\sqrt{5}})(X + i\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}) \text{ dans } \mathbb{C}[X]}$$

$$\boxed{P = 2X(X^2 + 5 - 2\sqrt{5})(X^2 + 5 + 2\sqrt{5}) \text{ dans } \mathbb{R}[X].}$$

Exercice 5

1. (Analyse) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul et vérifiant l'équation (E).

- (a) On pose $n = \deg(P)$. Comme P est non nul alors $n \in \mathbb{N}$.

$$P'(X)P''(X) = P(X) \neq 0_{\mathbb{C}[X]} \text{ donc } P' \text{ et } P'' \text{ sont non nuls, car sinon } P = 0_{\mathbb{C}[X]}.$$

$$\text{Donc } \deg(P') = n - 1 \geq 0, \deg(P'') = n - 2 \geq 0 \text{ et on a :}$$

$$\deg(P) = \deg(P'P'') \Leftrightarrow n = (n-1) + (n-2) \Leftrightarrow n = 3.$$

$$\text{Donc } \boxed{P \text{ est un polynôme de degré 3}}.$$

- (b) On peut donc écrire $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{C}[X]$, avec $a \neq 0$. Et on a :

$$P' = 3aX^2 + 2bX + c, P'' = 6aX + 2b \text{ et le coefficient dominant de } P'P'' \text{ est } 18a^2.$$

$$\text{Comme } P'(X)P''(X) = P(X) \text{ et } a \neq 0, \text{ on a : } 18a^2 = a \Leftrightarrow a = \frac{1}{18}.$$

$$\text{Donc } \boxed{\text{le coefficient dominant de } P \text{ est } a = \frac{1}{18}}.$$

- (c) $\deg(P') = 2$ donc $\boxed{P' \text{ admet au moins une racine } \alpha \text{ dans } \mathbb{C}}$, d'après le cours sur les équations du second degré à coefficients complexes, ou d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

$$\text{Comme } P \text{ vérifie (E), on a : } P(\alpha) = \underbrace{P'(\alpha)}_{=0} P''(\alpha) = 0. \text{ Donc } \boxed{\alpha \text{ est racine de } P}.$$

- (d) En dérivant chacun des membres de l'égalité (E), on obtient :

$$P'(X) = P''(X)P''(X) + P'(X)P^{(3)}(X) \text{ donc } [P''(\alpha)]^2 = \underbrace{P'(\alpha)}_{=0} - \underbrace{P'(\alpha)}_{=0} P^{(3)}(\alpha) = 0.$$

$$\text{Donc on a bien } \boxed{P''(\alpha) = 0}.$$

(e) $P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = 0$ donc α est racine de P de multiplicité au moins 3.

Comme le nombre de racines de P comptées avec multiplicités est majoré par $\deg(P) = 3$, α est racine de P de multiplicité 3 et α est l'unique racine de P dans \mathbb{C} .

Donc $P = \frac{1}{18}(X - \alpha)^3$, car le coefficient dominant de P est $a = \frac{1}{18}$.

2. (Synthèse) Soit $P = \frac{1}{18}(X - \alpha)^3$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$. On a :

$$P' = \frac{3}{18}(X - \alpha)^2, P'' = \frac{6}{18}(X - \alpha) \text{ et } P'P'' = \frac{1}{18}(X - \alpha)^3. \text{ Donc } P'(X)P''(X) = P(X).$$

Si P est nul, cette égalité est encore vérifiée.

Par analyse-synthèse, on a montré que l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$S = \left\{ \frac{1}{18}(X - \alpha)^3, \alpha \in \mathbb{C} \right\} \cup \{0_{\mathbb{C}[X]}\}.$$

Exercice 5

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$P_n(z) = 0 \iff (z + 1)^n = 1 \iff z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

$$\text{Donc } S_{\mathbb{C}} = \left\{ 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \text{ et } P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}} \right).$$

2. $\sin(0) = 0$ donc $P_n = X \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}} \right)$.

De plus, comme $P_n = (X + 1)^n - 1$, par la formule du binôme on a :

$$P_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k - 1 = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} X^k = X \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} X^{k-1} \stackrel{j=k-1}{=} X \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} X^j.$$

$$\text{Donc } P_n = XQ_n, \text{ où } Q_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} X^k.$$

3. On a donc $Q_n(0) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}} \right) = \binom{n}{1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1} 0^k}_{=0}$.

Donc $(-2i)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}} = n$. Comme

$$(-2i)^{n-1} = 2^{n-1} \left(e^{-i\frac{\pi}{2}} \right)^{n-1} = 2^{n-1} e^{-i\frac{(n-1)\pi}{2}}$$

$$\text{et } \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} = e^{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{ik\pi}{n}}, \text{ avec } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{ik\pi}{n} = \frac{i\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{i\pi n(n-1)}{2} \text{ on a}$$

$$2^{n-1} e^{-i\frac{(n-1)\pi}{2}} e^{i\frac{(n-1)\pi}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = n \text{ donc } \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}} e^{i\frac{(n-1)\pi}{2}}$$