Exercices École Ouverte PCSI-PTSI

1 Matrices

Exercice 1 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le but de cet exercice est de calculer A^n de trois façons différentes.

1. (a) Établir l'égalité $U^k = U$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Cette relation est-elle vraie pour $k = 0$?
   (b) Développer le produit $(I_3 + U)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire que A^n peut s'exprimer sous la forme $I_3 + \lambda_n U$ où λ_n est un nombre réel à calculer.
2. (a) Exprimer A^2 en fonction de A et I_3.
   (b) En déduire que A est inversible puis expliciter A^{-1}.
   (c) Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.
   (d) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$. En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (e) Retrouver ainsi l'expression des coefficients de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Est-elle valable pour $n = -1$?
3. (a) Calculer P^2. En déduire l'inversibilité de P ainsi que P^{-1}.
   (b) Expliciter les coefficients du produit PDP^{-1}. Que remarque-t-on ?
   (c) Retrouver ainsi que A est inversible puis exprimer A^{-1} en fonction de P et D^{-1}.
   (d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire les coefficients de A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2 Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère le système

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & my & + & z & = & 2 \\ mx & + & y & - & z & = & 1-m \\ mx & - & m^2y & + & z & = & 2 \\ x & - & my & + & z & = & m^2+1 \end{array} \right. , \text{ d'inconnues } x, y, z.$$

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles le système (S) est incompatible.
2. Pour chaque valeur de m pour laquelle (S) est compatible, déterminer l'ensemble de ses solutions.

Exercice 3 Pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on considère le système

$$(S_{a,b}) : \begin{cases} x+y+az & = 1 \\ ax+(a-1)y+z & = 1 \\ x+y+z & = b+1 \end{cases} \quad \text{d'inconnues réelles x, y, z.}$$

Résoudre ce système en répondant aux questions suivantes :

1. À quelle condition $(S_{a,b})$ est-il compatible ?
2. Décrire, pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la nature de l'ensemble des solutions de $(S_{a,b})$.
3. Lorsque $(S_{a,b})$ est compatible, précisez l'ensemble de ses solutions.

2 Continuité

Exercice 1 Étudier la limite de

a) $\dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$ en 1 b) $\dfrac{x^2-x-6}{x^3+8}$ en -2 c) $\ln\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right)$ en 2 et en $-\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}-2x}{x-1}$ en 1 et $-\infty$ e) $\dfrac{e^{2x}-e^x+x}{e^x-x}$ en $+\infty$ et $-\infty$ f) $\ln(1+e^x)-x+1$ en $+\infty$

Exercice 2 Dans chaque cas, étudier la continuité de f et calculer ses limites aux bornes de son ensemble de définition.

1. $f(x) = x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ 2. $f(x) = \lfloor x\rfloor + \sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$ 3. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & , x \in]-1,1[\\ 0 & , x \notin]-1,1[\end{cases}$.

Exercice 3 On considère la fonction $f : x \mapsto \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{x-1}$

1. Montrer que f est définie sur $D_f =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.
2. Montrer que f est continue sur chaque intervalle de son ensemble de définition.
3. (a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 1.
   (b) L'est-elle aussi en 0 ? Justifier soigneusement la réponse.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   Donner, sans justification, sa limite en $-\infty$.

Exercice 4 Pour $x \in \mathcal{D} = \mathbb{R}_+\backslash\{1\}$, on pose $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln(x)} & \text{sinon} \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble des points fixes de f (solutions de l'équation $f(x) = x$ dans $\mathcal{D}$).
2. Montrer que f est continue sur chaque intervalle de $\mathcal{D}$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur chaque intervalle de $\mathcal{D}\backslash\{0\}$.
3. Pour $x \in D\backslash\{0\}$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

4. Calculer les limites de f et f' en 1^-, 1^+ et $+\infty$.
5. Dresser les tableaux de variations de f et de f'.

Exercice 5 Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

1. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la dérivée de la fonction f.
3. En déduire que $\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctan x$ pour tout x.

3 Dérivabilité

Exercice 1 Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f sur domaine de définition

1. f est définie par $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$
2. f est définie par $f(x) = x \arcsin\left(1 - x^2\right)$
3. f est définie par $f(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right)$.

Exercice 2 Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\pi - 2x}} & si\ x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & si\ x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Étudier la dérivabilité de f.

Exercice 3 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+a}$, $a \in \mathbb{R}^*$

1. Justifier que la fonction f est de classe C^∞ sur un ensemble D que l'on précisera.
2. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour tout $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression de la dérivée n-ème de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 1}$
4. Retrouver le résultat ci-dessus en appliquant la formule de Leibniz.

Exercice 4

1. Démontrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}$$

2. En déduire que la suite (u_n) diverge où $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$

Exercice 5 On pose : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k^2}$.

1. Montrer que pour tout $a \geq 0$, $\frac{1}{1+(1+a)^2} \leq \arctan(a+1) - \arctan(a) \leq \frac{1}{1+a^2}$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 6 Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0,1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1} = \alpha$ et qu'on a $\alpha \in]0,1[$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.
4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 7 Étant donné un nombre réel $a > 0$, on définit la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = \mathrm{e}^{a(x-1)}$.

On définit alors la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f_a(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

I. Convergence de la suite (u_n)

1. Montrer, à l'aide d'une récurrence, que (u_n) est croissante et à valeurs dans $[0,1]$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge puis montrer que sa limite est une solution de l'équation $ax - \ln(x) - a = 0$ $(\boldsymbol{E})$.

   Donner une solution évidente de l'équation $(\boldsymbol{E})$.

Dans toute la suite, on notera $L(a)$ la limite de la suite (u_n).

II. Nombre de solutions de $(\boldsymbol{E})$

On définit la fonction g_a par $g_a(x) = ax - \ln(x) - a$.

1. Déterminer le domaine de définition D de g_a, et montrer que g_a est continue sur D.
2. Dresser le tableau de variation de g_a en justifiant soigneusement chaque résultat.
3. **Cas** $a = 1$. On suppose dans cette question que $a = 1$.

   Montrer que l'équation $(\boldsymbol{E})$ admet une seule solution et déterminer la valeur de $L(1)$.
4. **Cas** $a \neq 1$. On suppose dans cette question que $a \neq 1$.

   (a) À l'aide du tableau de variation de la fonction g_1, montrer que $1 + \ln(a) - a < 0$.

   (b) En déduire que l'équation $(\boldsymbol{E})$ admet exactement deux solutions, l'une appartenant à l'intervalle $\left]0, \frac{1}{a}\right[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$.

Dans ce qui suit, on notera $r(a)$ la plus petite racine de l'équation $(\boldsymbol{E})$.

III. Évaluation de $L(a)$ si $\boldsymbol{0 < a < 1}$. On suppose dans cette partie que $0 < a < 1$.

1. Montrer que $r(a) = 1$.
2. En déduire que $L(a) = 1$.

IV. Évaluation de $L(a)$ si $\boldsymbol{a > 1}$. On suppose dans cette partie que $a > 1$.

1. (a) Montrer que $r(a) \in]0, 1[$ et vérifier que $f_a(r(a)) = r(a)$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq r(a)$. On pourra raisonner par récurrence.
   (c) En déduire que $L(a) = r(a)$.

2. (a) Démontrer que $\forall (x, x') \in \left[0, \dfrac{1}{a}\right]^2,\ \left|f_a(x) - f_a(x')\right| \leq \dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}} \left|x - x'\right|$. (On utilisera l'IAF)
   (b) En déduire, à l'aide d'une récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - L(a)| \leq \left(\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}\right)^n$.
   (c) Démontrer que $\left(\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Indication : on pourra utiliser que sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$, avec égalité uniquement pour $x = 0$.

4 Polynômes

Exercice 1 Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le quotient Q et le reste R de la division euclidienne de A par B.

1. $A = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 1, B = X^2 + X + 1$
2. $A = 26X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1, B = 2X^3 - X^2 - X + 1$
3. $A = X^{n+2} + X^{n+1} - X^n, B = X^3 - 2X + 1$ où n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations 1. $z^5 = 1 + \mathrm{i}$ 2. $z^8 + z^4 + 1 = 0$ 3. $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0$ 4. $(z + 1)^3 - (z - 1)^3 = 0$.

Exercice 3 Soit $P = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$.

1. Décomposer $X^4 - 6X^3 + 9X^2$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire une décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 Soit $P = (1 + X)^5 - (1 - X)^5$.

1. Développer le polynôme P et montrer que 0 est racine de P.
2. Décomposer P en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5 L'objectif est de déterminer, par analyse-synthèse, l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$(E) : \quad P(X) = P'(X)P''(X).$$

1. (Analyse) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul vérifiant l'équation (E).
   (a) Déterminer le degré de P.
   (b) Déterminer le coefficient dominant de P.
   (c) Justifier que le polynôme P' admet une racine α dans $\mathbb{C}$. Montrer que $P(\alpha) = 0$.
   (d) En dérivant chacun des membres de l'égalité (E), montrer que $P''(\alpha) = 0$.
   (e) Déduire de tout ce qui précède, la factorisation de P en irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
2. (Synthèse) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 5 Pour tout entier $n \geq 2$, on considère le polynôme $P_n = (X+1)^n - 1$.

1. Déterminer les racines de P_n dans $\mathbb{C}$, puis factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Montrer qu'il existe un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n = XQ_n$.
   On écrira Q_n sous forme développée et factorisée.
3. En évaluant $Q_n(0)$ de deux façons différentes, calculer le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.