Devoir maison n$^{\text{o}}$ 14

A rendre le jeudi 6 mars 2025

Pour tout $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on note $\text{cotan}\,(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

On considère, pour tout entier naturel $n > 1$, le polynôme $Q_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.

1. (a) Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n.
   (b) Déterminer les racines du polynôme Q_n.
   (c) Vérifier que ces racines sont simples, et en déduire la factorisation de Q_n dans $\mathbb{C}[X]$.

2. On considère le polynôme $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^k, \quad n > 1.$
   (a) Montrer que $2P_n(X^2) = Q_{2n+1}(X)$.
   (b) En déduire les racines de P_n et vérifier qu'elles sont simples.
   (c) Calculer la somme des racines de P_n.
   (d) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^{\,2}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$

3. (a) Montrer que, $\forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$
   (b) En déduire que, $\forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{cotan}^{\,2} x \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant 1 + \text{cotan}^{\,2} x$
   (c) En déduire un encadrement de $\dfrac{1}{k^2}$ pour $k \geqslant 1$, puis la valeur de la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$