

## Devoir maison n° 5

A rendre le jeudi 19 octobre 2023

On considère la fonction  $g : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2 \arctan(x)$ .

1. Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ 
  - (a) Étudier la parité de la fonction  $h$ .
  - (b) Étudier les variations et les limites de la fonction  $h$ . Dresser son tableau de variation.
  - (c) Déterminer les antécédents de  $-1$  et de  $1$  par  $h$ .
2.
  - (a) Montrer que la fonction  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .
  - (b) Montrer que la fonction  $g$  est impaire.
  - (c) Donner les valeurs de  $g(0)$ ,  $g(1)$ ,  $g(\sqrt{3})$ .
3.
  - (a) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $\sqrt{1-h^2(x)} = \frac{|1-x^2|}{1+x^2}$
  - (b) Calculer alors  $g'(x)$  pour tout réel  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .
  - (c) Justifier que  $g$  est constante sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .
  - (d) Démontrer que  $\forall x \in [1, +\infty[$ ,  $g(x) = \pi - 4 \operatorname{Arctan}(x)$ .
  - (e) En déduire l'expression de  $g(x)$  sur l'intervalle  $] -\infty, -1]$ .
4. Tracer l'allure du graphe de  $g$ .