

Devoir maison n° 5

A rendre le jeudi 19 octobre 2023

On considère la fonction $g : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2 \arctan(x)$.

1. Soit la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \frac{2x}{1+x^2}$
 - (a) Étudier la parité de la fonction h .
 - (b) Étudier les variations et les limites de la fonction h . Dresser son tableau de variation.
 - (c) Déterminer les antécédents de -1 et de 1 par h .
2.
 - (a) Montrer que la fonction g est définie sur \mathbb{R} et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
 - (b) Montrer que la fonction g est impaire.
 - (c) Donner les valeurs de $g(0)$, $g(1)$, $g(\sqrt{3})$.
3.
 - (a) Montrer que pour tout réel x , $\sqrt{1-h^2(x)} = \frac{|1-x^2|}{1+x^2}$
 - (b) Calculer alors $g'(x)$ pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
 - (c) Justifier que g est constante sur l'intervalle $[-1, 1]$.
 - (d) Démontrer que $\forall x \in [1, +\infty[$, $g(x) = \pi - 4 \operatorname{Arctan}(x)$.
 - (e) En déduire l'expression de $g(x)$ sur l'intervalle $] -\infty, -1]$.
4. Tracer l'allure du graphe de g .