Correction École Ouverte PCSI-PTSI

1 Matrices

Exercice 1 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Par le calcul on trouve que $U^2 = U$. Démontrons que $\forall k \in \mathbb{N}^*, U^k = U$.

   La propriété est vraie au rang 1 et si $U^k = U$ à un rang $k \in \mathbb{N}^*$ (HR), alors on a : $U^{k+1} = U^k U = UU = U^2 = U$ et la propriété est vraie au rang $k+1$.

   Par récurrence, on a $\boxed{U^k = U \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*}$.

   $\boxed{\text{Cette égalité est fausse pour } k = 0}$ car $U^0 = I_3 \neq U$.

   (b) I_3 et U commutent donc, par la formule du binôme, on a :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (I_3 + U)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} U^k}.$$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(I_3+U)^n = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} U = I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \right) U$.

   $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1$ et $A = I_3 + U$ donc $\boxed{A^n = I_3 + \lambda_n U, \text{ avec } \lambda_n = 2^n - 1}$.

   $\lambda_0 = 0$ et $A^0 = I_3$ donc $\boxed{\text{la formule est encore vraie pour } n = 0}$.

2. (a) Par le calcul on trouve que $\boxed{A^2 = 3A - 2I_3}$.

   (b) Donc $A(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3) = (-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3)A = I_3$.

   Donc $\boxed{A \text{ est inversible d'inverse } A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

   (c) Démontrons cette propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   — $A^0 = a_0 A + b_0 I_3$ où $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. La propriété est vraie au rang 0.

   — Supposons qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$. (HR)

   $A^{n+1} = AA^n \underset{\text{(HR)}}{=} A(a_n A + b_n I_3) = a_n A^2 + b_n A I_3 \underset{2.(a)}{=} a_n(3A - 2I_3) + b_n A$.

   Donc $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}I_3$ avec $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$ et la propriété est vraie au rang $n+1$.

   Par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = a_n A + b_n I_3}$.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, on a les relations $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $\boxed{b_{n+1} = -2a_n}$.

Remplacons n par $n+1$ dans la première relation : $a_{n+2} = 3a_{n+1} + b_{n+1}$. Avec la deuxième relation on obtient alors $\boxed{a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n}$.

(a_n) est une SRL2 d'équation caractéristique $q^2 - 3q + 2 = 0$, de racines évidentes $q_1 = 1$ et $q_2 = 2$.

Donc il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = C_1 \times 1^n + C_2 \times 2^n = C_1 + 2^n C_2$.

De plus, $a_0 = 0$, $a_1 = 3a_0 + b_0 = 3 \times 0 + 1 = 1$ et

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 2C_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 2^n - 1}$.

Si $n \geq 0,\ b_{n+1} = -2a_n$ donc si $n \geq 1,\ b_n = -2a_{n-1} = -2(2^{n-1} - 1) = -2^n + 2$, ce qui est encore vrai pour $n = 0$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 2 - 2^n}$.

(e) $A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3 =$
$$\begin{pmatrix} 2 \times 2^n - 2 & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2 - 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 2^n \end{pmatrix}.$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et pour } n = -1 \text{ on retrouve bien } A^{-1}}$.

3. (a) Par le calcul, on trouve $\boxed{P^2 = I_3}$. Donc $\boxed{P \text{ est inversible d'inverse } P^{-1} = P}$.

(b) Par le calcul, on trouve $\boxed{PDP = A}$.

(c) D est une matrice diagonale inversible car ses coefficients diagonaux sont non nuls. On en déduit que $\boxed{A \text{ est inversible}}$, comme produit de matrices inversibles, et on a :

$$\boxed{A^{-1} = P^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P}.$$

(d) Démontrons d'abord cette propriété par récurrence sur $\mathbb{N}$.

— $A^0 = I_3$ et $PD^0P = PI_3P = P^2 = I_3$ donc la propriété est vraie au rang 0.

— Supposons que $A^n = PD^nP$ à un rang $n \in \mathbb{N}$ (HR). Donc $A^{n+1} = A^nA \underset{\text{(HR)}}{=} PD^nPPDP = PD^nI_3DP = PD^{n+1}P$ et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $A^{-n} = (A^n)^{-1} = (PD^nP)^{-1} = P^{-1}D^{-n}P^{-1} = PD^{-n}P$.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{Z},\ A^n = PD^nP}$ et on a :

$$A^n = PD^nP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Exercice 2

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. On applique l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice augmentée de (S) :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 & 1-m \\ m & -m^2 & 1 & 2 \\ 1 & -m & 1 & m^2+1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & 1 & 2 \\ 0 & 1+m^2 & -1-m & 1-3m \\ 0 & 0 & 1-m & 2(1-m) \\ 0 & 0 & 0 & m^2-1 \end{array}\right),$$

par les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - mL_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$.

<u>Si $m \notin \{-1, 1\}$</u>, le système (S) est incompatible et l'ensemble des solutions est <u>$S = \emptyset$</u>.

2. <u>Si $m = 1$</u>, en effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$ et $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, on a :

$$(A|B) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ et } (S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y - z & = & -1 \end{array} \right. .$$

Dans ce cas, le système (S) est de rang 2, d'inconnues principales x et y, et de paramètre z. Il admet une infinité de solutions et $\boxed{S = \{(1, -1+z, z),\ z \in \mathbb{R}\}}$.

<u>Si $m = -1$</u>, en effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$, $L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, on a :

$$(A|B) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ et } (S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2 \\ y & = & 2 \\ z & = & 2 \end{array} \right. .$$

Dans ce cas, le système (S) est de rang 3, d'inconnues principales x, y et z. Il admet une unique solution et $\boxed{S = \{(-2, 2, 2)\}}$.

Exercice 3 $(S_{a,b}) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 & L_1 \\ ax & + & (a-1)y & + & z & = & 1 & L_2 \\ x & + & y & + & z & = & b+1 & L_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} x & + & y & + & z & = & b+1 & L_3 \to L_1 \\ & & & & (a-1)z & = & -b & L_1 - L_3 \to L_2 \\ & - & y & + & (1-a)z & = & 1-ab-a & L_2 - aL_3 \to L_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\boxed{\text{Si } a \neq 1}$ $\left\{\begin{array}{ccll} z & = & \dfrac{b}{1-a} & \\ y & = & b-1+ab+a & -(L_2+L_3) \\ x & = & 2-ab-a-\dfrac{b}{1-a} & \end{array}\right.$

$\boxed{\text{Si } a = 1}$ $(S_{1,b}) : \left\{\begin{array}{cccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 & L_1 \\ x & & & + & z & = & 1 & L_2 \\ x & + & y & + & z & = & b+1 & L_3 \end{array}\right.$

Si de plus $b+1=1 \Leftrightarrow b=0$ alors $(S_{1,0}) : \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1-t \\ y & = & 0 \\ z & = & t \end{array}\right.$ et si $b \neq 0$ alors $S = \emptyset$

Conclusion $(S_{a,b})$ est compatible pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ sauf si $a=1$ et $b \neq 0$

Si $a \neq 1$ alors l'ensemble des solutions est un point de coordonnées

$$(2-a-ab-\frac{b}{1-a}, b-1+ab+a, \frac{b}{1-a})$$

Si $a=1$ et $b=0$ alors l'ensemble des solutions est une droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1-t \\ y & = & 0, \quad t \in \mathbb{R} \\ z & = & t \end{array}\right.$$

2 Continuité

Exercice 1 a) $\lim_{x \to 1}(x^2+3x-1) = 4$

Or $\lim_{x \to 1_+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$ donc $\boxed{\lim_{x \to 1_+} \dfrac{x^2+3x-1}{x-1} = +\infty}$ par produit

Er $\lim_{x \to 1_-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$ donc $\boxed{\lim_{x \to 1_-} \dfrac{x^2+3x-1}{x-1} = -\infty}$ par produit

b) $\dfrac{x^2-x-6}{x^3+8}$ en -2 le numérateur et le dénominateur sont nuls, donc on peut simplifier la fraction par $x+2$:

$x^2-x-6 = (x+2)(x-3)$ et $x^3+8 = (x+2)(x^2-2x+4)$ donc $\dfrac{x^2-x-6}{x^3+8} = \dfrac{x-3}{x^2-2x+4}$ et

$\boxed{\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2-x-6}{x^3+8} = -\dfrac{5}{12}}$

c) $\ln\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right)$ $\dfrac{2x+1}{x-2}$ est du signe de $(2x+1)(x-2)$ qui est un polynôme du second degré avec deux racines, 2 et $-\dfrac{1}{2}$

L'ensemble de définition est $]-\infty,-\dfrac{1}{2}[\cup]2,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$ et $\lim\limits_{x\to 2_+}(x-2)=0_+$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 2}\ln\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right)=+\infty}$ par quotient puis composition.

$\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}_-}(2x+1)=0_-$ et $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}(x-2)=-\dfrac{5}{2}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}_-}\ln\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right)=-\infty}$ par quotient puis composition.

d) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}-2x}{x-1}$ est définie sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 1_+}\sqrt{x^2-1}-2x=-2$ et $\lim\limits_{x\to 1_+}x-1=0_+$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 1_+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-2x}{x-1}=-\infty}$ par quotient.

$\dfrac{\sqrt{x^2-1}-2x}{x-1}=\dfrac{|x|\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-2x}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}$ Or pour $x<0, |x|=-x$ donc

$$\dfrac{\sqrt{x^2-1}-2x}{x-1}=\dfrac{x\left(-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-2\right)}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}\ \boxed{\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-3}$$

e) $\dfrac{e^{2x}-e^x+x}{e^x-x}=\dfrac{x\left(\dfrac{e^{2x}}{x}-\dfrac{e^x}{x}+1\right)}{x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)}$ $\boxed{\longrightarrow -1}$ en $-\infty$ par quotient

$\dfrac{e^{2x}-e^x+x}{e^x-x}=\dfrac{e^{2x}\left(1-e^{-x}+\dfrac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\dfrac{x}{e^x}\right)}$ $\boxed{\longrightarrow +\infty}$ en $+\infty$ par croissances comparées et quotient

f) $\ln(1+e^x)-x+1=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{e^x}\right)+1$ $\boxed{\longrightarrow 1}$ en $+\infty$ par composition et somme

Exercice 2 1. $f(x)=x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus[-1,0]$ (à justifier) et est continue sur son ensemble de définition.

$\boxed{\lim\limits_{x\to -1_-}f(x)=-\infty}$ par composition et produit

$f(x)=x^2\ln(x+1)-x^2\ln x$ $\boxed{\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0}$ par croissances comparées et somme. (f est prolongeable par continuité à droite en 0)

$f(x)=x\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$ et en posant $u=\dfrac{1}{x}\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}0$ avec $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$ on obtient

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty}$ par produit.

2. $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ f est continue sur $]n, n+1[, \forall n \in \mathbb{Z}$ car $x - \lfloor x \rfloor \geqslant 0$ pour tout x et la fonction partie entière y est est continue.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = n$ et pour $x \geqslant n$, $\lfloor x \rfloor = n$ donc $\lim\limits_{x \to n_+} f(x) = n$

Pour $x < n$, $\lfloor x \rfloor = n - 1$ donc $\lim\limits_{x \to n_-} f(x) = n - 1 + 1 = n$

f est alors continue en chaque $n \in \mathbb{Z}$. Finalement , $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor < 1$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$ par comparaison.

3. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & , x \in]-1, 1[\\ 0 & , x \notin]-1, 1[\end{cases}$. f est continue sur $]-1, 1[$ car $1 - x^2$ ne s'annule pas sur cet intervalle et f est continue sur $\mathbb{R} \setminus]-1, 1[$ car elle y est constante.

$\lim\limits_{x \to 1_-} \dfrac{1}{1 - x^2} = \lim\limits_{x \to -1_+} \dfrac{1}{1 - x^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 1_-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1_+} f(x) = 0 = f(1) = f(-1)$ donc f est continue également en 1 et en -1 donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = e^{(x-1)\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}$ existe ssi $\dfrac{x}{x-1} > 0 \Longleftrightarrow x < 0$ ou $x > 1$.

   Comme la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ et ln est définie sur $]0; +\infty[$,

   $$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathcal{D}_f =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[}.$$

2. Sur $]-\infty; 0[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ est continue (comme fonction rationnelle continue sur son ensemble de définition) à valeurs dans $]0; +\infty[$. Comme la fonction ln est continue sur $]0; +\infty[$, la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ est continue sur $]-\infty; 0[$ comme composée de fonctions continues. Comme les fonctions exp et $x \mapsto x - 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto (x-1)\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ est continue sur $]-\infty; 0[$ comme produit de fonctions continues et f est continue sur $]-\infty; 0[$ comme composée de fonctions continues.

   On montre, de même, que f est continue sur $]1; +\infty[$.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue sur chaque intervalle de son ensemble de définition}}$.

3. (a) $\forall x > 1$, $(x-1)\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = (x-1)\ln(x) - (x-1)\ln(x-1)$.

   $(x-1)\ln(x) \underset{x \to 1^+}{\longrightarrow} 0$, par opérations sur les limites.

   $x - 1 \underset{x \to 1^+}{\longrightarrow} 0^+$ et $y \ln(y) \underset{y \to 0^+}{\longrightarrow} 0$, par croissance comparée.

   Donc $(x-1)\ln(x-1) \underset{x \to 1^+}{\longrightarrow} 0$, par composition.

   Donc $f(x) \underset{x \to 1^+}{\longrightarrow} 1$ par opérations sur les limites et par composition.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité (à droite) en 1}}$.

(b) $\dfrac{x}{x-1} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0^+$ donc $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$, par composition.

Par opérations sur les limites et par composition, on obtient :

$(x-1)\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$ puis $f(x) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ n'est pas prolongeable par continuité (à gauche) en } 0}$.

4. $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \mathrm{e}^{(x-1)\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right)}$ et $(x-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x-1}}$.

Or $\dfrac{1}{x-1} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{\ln(1+y)}{y} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 1$.

Donc, par composition, on a $(x-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 1$, puis $\boxed{f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}}$.

On montre, de même, que $\boxed{f(x) \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}}$.

Exercice 4 Pour $x \in \mathcal{D} = \mathbb{R}_+\backslash\{1\}$, on pose $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln(x)} & \text{sinon} \end{cases}$

1. $f(0) = 0$ donc 0 est un point fixe de f. Si $x \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$, alors on a :

$$f(x) = x \iff \frac{x}{\ln(x)} = x \underset{\ln(x)\neq 0}{\iff} x = x\ln(x) \underset{x\neq 0}{\iff} 1 = \ln(x) \iff x = \mathrm{e}.$$

Donc $\boxed{\text{l'ensemble des points fixes de } f \text{ est } \{0, \mathrm{e}\}}$.

2. $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathcal{D}\backslash\{0\}}$, par les théorèmes généraux.

Si $x \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$ alors $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 = f(0)$, par opérations sur les limites.

Donc f est continue en 0 et sur $\mathcal{D}\backslash\{0\}$, donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathcal{D}}$.

3. Pour $x \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$, on a :

$$\boxed{f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}} \text{ et } f''(x) = \frac{\ln^2(x) - 2\ln(x)(\ln(x)-1)}{x\ln^4(x)}\boxed{= \frac{\ln(x)(2-\ln(x))}{x\ln^4(x)}}.$$

4. Par opérations sur les limites, en $1^\pm$, on a :

$$\boxed{f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} -\infty}, \boxed{f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty} \text{ et } \boxed{f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)} \underset{x\to 1^\pm}{\longrightarrow} -\infty}.$$

Par croissance comparée, en $+\infty$, on a : $\boxed{f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

Par opérations sur les limites, en $+\infty$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{\ln^2(x)} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0}$.

5. Pour $x \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$, $\ln^2(x) > 0$ donc $f'(x) > 0 \iff \ln(x) - 1 > 0 \iff x > \mathrm{e}$. D'où

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Pour $x \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$, $x\ln^4(x) > 0$ donc

$$f''(x) > 0 \iff \ln(x)(2 - \ln(x)) > 0 \iff 0 < \ln(x) < 2 \iff 1 < x < \mathrm{e}^2. \text{ D'où}$$

x	0		1		e2		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Exercice 5 Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

1. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$ donc $0 \leqslant \dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} < 1, \forall x \in \mathbb{R}$ et
   $-1 < \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1, \forall x \in \mathbb{R}$
   La fonction arcsinus étant dérivable sur $]-1,1[$, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien dérivable sur } \mathbb{R}.}$
2. Calculer la dérivée de la fonction f.
   $f' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
   $u = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
   $u' = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)}$
   $1 - u^2 = 1 - \dfrac{x^2}{1+x^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$
   $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}}$
3. En déduire que $\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctan x + C$ pour tout x, $C = 0$ car $f(0) = 0 = \arctan(0)$.
   $\boxed{\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctan x, \forall x \in \mathbb{R}}$

3 Dérivabilité

Exercice 1

1. f est définie par $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$ Pour tout $x \in \mathbb{R}, 2\sqrt{x} \leqslant 1 + |x|$ car $1 + |x| - 2\sqrt{x} = (1 - \sqrt{x})^2 \geqslant 0$.

   La fonction racine étant définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ on a $x \geqslant 0$ et on obtient $0 \leqslant \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} \leqslant 1$ avec l'égalité à 1 ssi $x = 1$

   La fonction arcsinus étant définie et continue sur $[-1, 1]$,

   $\boxed{f \text{ est alors définie et continue sur } \mathbb{R}_+}$ par composition.

   La fonction racine étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction arcsinus étant dérivable sur $]-1, 1[$, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \setminus 1}$

   $f'(x) = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ avec $u = \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}, u' = \dfrac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}$ et $1 - u^2 = \dfrac{(1-x)^2}{(1+x)^2}$

   $$f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}\frac{1+x}{|1-x|} = \boxed{\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)} & x \in]1, +\infty[\\ -\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)} & x \in]0, 1[\end{cases}}$$

   Donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1_+} f'(x) = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1_-} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$

   $\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est ni dérivable en 0, ni dérivable en 1}}$ d'après le théorème de la limite de la dérivée.

   Remarque La courbe représentative de f admet en 0 une tangente verticale et en 1 deux demi-tangentes.

2. f est définie par $f(x) = x \arcsin\left(1 - x^2\right)$

   $-1 \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 - x^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$

   La fonction arcsinus étant définie et continue sur $[-1, 1]$,

   $\boxed{f \text{ est alors définie et continue sur } [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]}$ par composition et produit.

   $1 - x^2 = \pm 1 \Leftrightarrow x^2 = 0$ ou $x^2 = 2$

   La fonction arcsinus étant dérivable sur $]-1, 1[$, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur }]-\sqrt{2}, 0[\cup]0, \sqrt{2}[}$

   $f(0) = 0$ et $\dfrac{f(x)}{x} = \arcsin(1 - x^2) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$ donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable en 0}}$

   $f'(x) = \arcsin(1 - x^2) + x \times \dfrac{-2x}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}} = \arcsin(1 - x^2) - \dfrac{2x^2}{\sqrt{2x^2 - x^4}} =$
   $\arcsin(1 - x^2) - \dfrac{2x^2}{|x|\sqrt{2 - x^2}} \underset{x\to\pm\sqrt{2}}{\longrightarrow} -\infty$ donc

   $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable ni en } \sqrt{2}, \text{ ni en } -\sqrt{2}}$ d'après le théorème de la limite de la dérivée.

3. f est définie par $f(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right)$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car la fonction racine est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ mais dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})$
   En posant $u = \sqrt{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, avec $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u} = 1$ on obtient $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$
   $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est donc dérivable en } 0}$ d'après le théorème de la limite de la dérivée et $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+}$

Exercice 2 $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\pi - 2x}}, & si\ x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & si\ x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\forall x \in \left]-\infty, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\pi - 2x > 0$. Donc $x \mapsto \sqrt{\pi - 2x}$ est dérivable sur $I = \left]-\infty, \dfrac{\pi}{2}\right[$, comme composée de fonctions dérivables. On en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable sur } I}$, comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

Si $x < \dfrac{\pi}{2}$, on a : $\dfrac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \dfrac{\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{\pi - 2x}}$.

$\sqrt{\pi - 2x} \underset{x\to \frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} 0^+$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{\pi - 2x}} \underset{x\to \frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} +\infty$, par opérations sur les limites.

$\dfrac{\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \underset{x\to \frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} \cos'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$.

Donc $\dfrac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \underset{x\to \frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} -\infty$, par opérations sur les limites, et $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } \dfrac{\pi}{2}}$.

Exercice 3 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x + a}$, $a \in \mathbb{R}^*$

1. f est de classe C^∞ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ comme inverse d'une fonction C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas.
2. $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(x + a)^{-n-1} = \boxed{\dfrac{(-1)^n n!}{(x + a)^{n+1}}}$ pour tout $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}$.
3. $\dfrac{1}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{x + 1}\right)$
   D'après la question précédente, en prenant $a = 1$ et $a = -1$,
   $\boxed{\left(\dfrac{1}{x^2 - 1}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{2}\left(\dfrac{1}{(x - 1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x + 1)^{n+1}}\right)}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
4. $\dfrac{1}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{x - 1} \times \dfrac{1}{x + 1}$. D'après la formule de Leibniz, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
   $\left(\dfrac{1}{x^2 - 1}\right)^{(n)} =$
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{x - 1}\right)^{(k)} \left(\frac{1}{x - 1}\right)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k!(n - k)!(-1)^{k+n-k} \frac{1}{(x - 1)^{k+1}} \frac{1}{(x + 1)^{n-k+1}}$

Or $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} k!(n-k)!(-1)^{k+n-k} = (-1)^n n!$, $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$ avec $a = \dfrac{1}{x-1}$ et $b = \dfrac{1}{x+1}$ et $a - b = \dfrac{2}{(x-1)(x+1)} = 2ab$ On obtient $\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{2}(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \dfrac{(-1)^n n!}{2}(a^{n+1} - b^{n+1}) = \dfrac{(-1)^n n!}{2}\left(\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$

Exercice 4

1. On reconnait **le théorème des accroissements finis** en posant $f(x) = \ln(\ln x)$.

   f est dérivable sur $]1, +\infty[$ car $\ln x > 0$ sur cet intervalle, donc f est dérivable sur chaque intervalle $[k, k+1]$ pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2.

   Il existe donc $c \in [k, k+1]$ tel que $f'(c) = f(k+1) - f(k)$

   $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ et $k \leqslant c \leqslant k+1 \Rightarrow \dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant f'(c) \leqslant \dfrac{1}{k \ln(k)}$

   donc $\boxed{\dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \ln(\ln(k+1) - \ln(\ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k\ln(k)}}$

2. En sommant l'inégalité de droite on obtient $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(\ln(k+1) - \ln(\ln(k) \leqslant u_n$

   et en utilisant les sommes télescopiques $\ln(\ln(n+1)) - \ln 2 \leqslant u_n$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln(\ln(n+1)) - \ln 2) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$ par comparaison.

Exercice 5 On pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k^2}$.

1. On reconnait **le théorème des accroissements finis** en posant $f(x) = \arctan x$.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur chaque intervalle $[a, a+1]$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+$. Il existe donc $c \in [a, a+1]$ tel que $f'(c) = f(a+1) - f(a)$

   $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $0 \leqslant a \leqslant c \leqslant a+1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+(a+1)^2} \leqslant f'(c) \leqslant \dfrac{1}{1+a^2}$

   donc $\boxed{\dfrac{1}{1+(1+a)^2} \leq \arctan(a+1) - \arctan(a) \leq \dfrac{1}{1+a^2}}$

2. En sommant ces inégalités on obtient

   $\displaystyle\sum_{a=0}^{n} \frac{1}{1+(1+a)^2} \leqslant \sum_{a=0}^{n}(\arctan(a+1) - \arctan(a)) \leqslant u_n$

   En utilisant les sommes télescopiques et un changement d'indice pour la somme de gauche, on obtient

   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{1+k^2} = u_n - 1 + \frac{1}{1+(n+1)^2} \leqslant \arctan(n+1) \leqslant u_n$ puis

   $\boxed{\arctan(n+1) \leqslant u_n \leqslant \arctan(n+1) + 1 - \dfrac{1}{1+(n+1)^2} \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 1}$

car $\arctan x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \forall x \in \mathbb{R}$
La suite (u_n) est alors croissante, comme somme de termes positifs, et majorée, $\boxed{\text{elle converge vers un réel } \ell}$ qui vérifie $\boxed{\frac{\pi}{2} \leqslant \ell \leqslant \frac{\pi}{2}+1}$ par passage à la limite dans l'encadrement précédent.

Exercice 6 Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1}$

1. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^x + 1 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} \leqslant 1$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in [0,1].}$
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} - x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\mathrm{e}^x + 1 \neq 0$ sur $\mathbb{R}$ et
$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1) - \mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x+1)^2} - 1 = \frac{\mathrm{e}^x - (\mathrm{e}^x+1)^2}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = -\frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + 1}{(\mathrm{e}^x+1)^2} < 0$ sur $\mathbb{R}$.
f étant continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. Or $f(0) = \frac{1}{2} > 0$ et $f(1) = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1} - 1 = \frac{-1}{\mathrm{e}+1} < 0$
$\boxed{\text{il existe donc un unique } \alpha \in]0,1[\text{ tel que } \frac{e^\alpha}{e^\alpha+1} = \alpha}$
3. On reconnait **l'inégalité des accroissements finis**.
Soit $g : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$. g est dérivable deux fois sur $[0,1]$ et $g'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$
$g''(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)^2 - 2\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^x+1)}{(\mathrm{e}^x+1)^4} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x+1)^3} = \frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x+1)^3} < 0$ sur $[0,1]$ car $1 - \mathrm{e}^x < 0$ sur $[0,1]$.
g' est alors décroissante sur $[0,1]$, avec $g'(0) = \frac{1}{4}$ et $g'(1) > 0$ donc
$\boxed{0 \leqslant g'(x) \leqslant \frac{1}{4}, \forall x \in [0,1]}$
Par l'inégalité des accroissements finis, $\forall x, x' \in [0,1]\ |g(x) - g(x')| \leqslant \frac{|x-x'|}{4}$.
En posant $x = u_n$ et $x' = \alpha$, on a bien $x, x' \in [0,1]$ d'après les questions précédentes et on obtient $g(x) = u_{n+1}, g(\alpha) = \alpha$ puis $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|}$
4. On démontre par récurrence (à faire) que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$ ce qui équivaut à dire que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha.}$

Exercice 7 Étant donné un nombre réel $a > 0$, on définit la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = \mathrm{e}^{a(x-1)}$.
On définit alors la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f_a(u_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$.

I. Convergence de la suite (u_n)

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété Q_n : "$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$".

— $u_0 = 0$ et $u_1 = f_a(0) = \mathrm{e}{-a} \in]0,1[$ car $a > 0$. Donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$ et Q_0 est vraie.

— Supposons que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ à un rang $n \in \mathbb{N}$ (HR). La fonction f_a est croissante sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions croissantes, car $a > 0$. Donc on a :

$f_a(0) \leq f_a(u_n) \leq f_a(u_{n+1}) \leq f_a(1)$ donc $0 \leq \mathrm{e}^{-a} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$ et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Par récurrence, Q_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et
$\boxed{(u_n) \text{ est croissante à valeurs dans } [0,1]}$.

2. On en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers un réel } L(a) \in [0,1]}$, par le théorème de la limite monotone et par passage à la limite.

   f_a est continue sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions qui le sont, et
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f_a(u_n)$.

   Donc $L(a) = f_a(L(a)) = \mathrm{e}a(L(a) - 1) > 0$ et par application de la fonction ln on obtient :

   $\ln(L(a)) = \ln(f_a(L(a))) = a(L(a) - 1)$ et donc $aL(a) - \ln(L(a)) - a = 0$.

   $\boxed{L(a) \text{ est une solution de } \boldsymbol{(E)} \text{ et le nombre 1 est une solution évidente de } \boldsymbol{(E)}}$.

II. Nombre de solutions de $\boldsymbol{(E)}$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $g_a(x) = ax - \ln(x) - a$ existe ssi $x > 0$. Donc $\boxed{D = \mathbb{R}_+^*}$. De plus,

   $\boxed{g_a \text{ est continue (et même dérivable) sur } D}$, comme somme de fonctions qui le sont.

2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g_a'(x) = a - \frac{1}{x}$ et $g_a'(x) > 0 \iff a > \frac{1}{x} \iff \frac{1}{a} < x$, car $a, x > 0$.

   $g_a(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, par opérations sur les limites.

   En $+\infty$, $g_a(x) = x\left(a - \frac{\ln x}{x}\right) - a \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par croissance comparée et opérations sur les limites, car $a > 0$.

   $g_a\left(\frac{1}{a}\right) = 1 + \ln a - a$. D'où le tableau de variation :

x	0		$\frac{1}{a}$		$+\infty$
$g_a'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g_a(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$1 + \ln a - a$	$\nearrow$	$+\infty$

3. **Cas** $a = 1$. En remplaçant a par 1, on obtient le tableau de variation de g_1 :

x	0		1		$+\infty$
$g_1'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g_1(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

D'après ce tableau de variation, l'équation $g_1(x) = 0$ a pour unique solution 1.

Si $a = 1$, $(\boldsymbol{E}) \iff g_1(x) = 0$ et $L(1)$ est solution de $(\boldsymbol{E})$.

Donc $\boxed{(\boldsymbol{E}) \text{ a pour unique solution 1 et } L(1) = 1}$.

4. **Cas** $a \neq 1$. On suppose dans cette question que $a \neq 1$.

   (a) D'après le tableau de variation de g_1, $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\},\ x - \ln(x) - 1 > 0$.

   Donc, si $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, alors $a - \ln(a) - 1 > 0$ et $\boxed{1 + \ln a - a < 0}$.

   (b) g_a est continue, strictement décroissante sur $\left]0, \frac{1}{a}\right[$ et strictement croissante sur $\left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$. D'après le théorème de la bijection, g_a réalise une bijection de $\left]0, \frac{1}{a}\right[$ sur l'intervalle $g_a\left(\left]0, \frac{1}{a}\right[\right) =]1 + \ln a - a, +\infty[$ et g_a réalise une bijection de $\left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$ sur l'intervalle $g_a\left(\left]\frac{1}{a}, +\infty\right[\right) =]1 + \ln a - a, +\infty[$ qui contient 0, d'après la question précédente.

   Dans ce cas, l'équation $g_a(x) = 0$, et donc $\boxed{(\boldsymbol{E}), \text{ admet exactement deux solutions}}$: l'une, notée $r(a)$, appartenant à $\left]0, \frac{1}{a}\right[$ et l'autre appartenant à $\left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$.

III. Évaluation de $L(a)$ si $0 < a < 1$. On suppose dans cette partie que $0 < a < 1$.

1. On sait que $(\boldsymbol{E})$ admet exactement une solution dans $\left]0, \frac{1}{a}\right[$, notée $r(a)$.
   Si $0 < a < 1$ alors $1 \in \left]0, \frac{1}{a}\right[$ et 1 est une solution de $(\boldsymbol{E})$. Donc, dans ce cas, $\boxed{r(a) = 1}$.

2. Un passage à la limite dans l'inégalité $u_n \leq 1$ donne $L(a) \leq 1$. Or $1 = r(a)$ est la plus petite solution de $(\boldsymbol{E})$ et $L(a)$ est une solution de $(\boldsymbol{E})$. Donc $\boxed{\text{si } 0 < a < 1 \text{ alors } L(a) = 1}$.

IV. Évaluation de $L(a)$ si $a > 1$. On suppose dans cette partie que $a > 1$.

1. (a) On sait que $r(a) \in \left]0, \frac{1}{a}\right[$. Or $a > 1$ entraîne $\frac{1}{a} < 1$ donc $\boxed{r(a) \in]0, 1[}$.

   $r(a)$ est une solution de $(\boldsymbol{E})$ donc $ar(a) - a = \ln(r(a))$.

   En appliquant l'exponentielle, on a : $\boxed{f_a(r(a)) = \mathrm{e}^{ar(a)-a} = r(a)}$.

(b) On procède par récurrence.

— $r(a) > 0$ et $u_0 = 0$ donc $u_0 \leq r(a)$. La propriété est vraie au rang 0.

— Supposons que $u_n \leq r(a)$ à un rang $n \in \mathbb{N}$ (HR).

En appliquant la fonction croissante f_a, on obtient :

$u_{n+1} = f_a(u_n) \leq f_a(r(a)) = r(a)$, d'après la question précédente.

La propriété est vraie au rang $n+1$.

Par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq r(a)}$.

(c) Par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient $L(a) \leq r(a)$.

$L(a)$ est une solution de $(\boldsymbol{E})$ et $r(a)$ est la plus petite solution de $(\boldsymbol{E})$ donc $\boxed{L(a) = r(a)}$.

2. (a) f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$, par les théorèmes généraux, et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$f_a'(x) = a\mathrm{e}^{a(x-1)} = af_a(x) > 0$.
f_a est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{a}\right]$, $\left|f_a'(x)\right| = af_a(x) \leq af_a\left(\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}$.

Par l'I.A.F. on a bien $\boxed{\forall (x,x') \in \left[0, \dfrac{1}{a}\right]^2,\ \left|f_a(x) - f_a(x')\right| \leq \dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}\left|x - x'\right|}$.

(b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - L(a)| \leq \left(\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}\right)^n$.

— $u_0 = 0$ et $L(a) = r(a) \in]0,1[$ donc $|u_0 - L(a)| \leq 1 = \left(\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}\right)^0$.

La propriété est vraie au rang 0.

— Supposons qu'elle soit vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ (HR). D'après **I.** 1. et **IV.** 1.(b) et (c), $0 \leq u_n \leq L(a) \leq \frac{1}{a}$. Donc, d'après **IV.** 1.(a) et 2.(a), on a :

$$|u_{n+1} - L(a)| = |f_a(u_n) - f_a(L(a))| \leq \frac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}\left|u_n - L(a)\right| \underset{\text{(HR)}}{\leq} \left(\frac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}\right)^{n+1},$$

car $\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}} > 0$. La propriété est vraie au rang $n+1$.

Par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - L(a)| \leq \left(\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}\right)^n}$.

(c) $\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}} = e^{\ln a - a + 1}$ Or $\ln a - a + 1 < 0$ pour tout $a > 0$ d'après 4.(a), d'où $0 < \dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}} < 1$. Donc $\boxed{\left(\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$.

4 Polynômes

Exercice 1

1. $A = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 1, B = X^2 + X + 1$
   $\boxed{Q = X^2 - 4X + 7 \text{ et } R = -3x - 8}$
2. $A = 26X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1, B = 2X^3 - X^2 - X + 1$
   $\boxed{Q = 13X + \frac{25}{2} \text{ et } R = \frac{29X^2 - 5X - 23}{2}}$
3. $A = X^{n+2} + X^{n+1} - X^n = X^n(X^2 + X - 1), B = X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(X^2 + X - 1)$
   donc $A = B\dfrac{X^n}{X - 1}$
   Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k = \frac{X^n - 1}{X - 1}$ donc $\dfrac{X^n}{X - 1} = Q + \dfrac{1}{X - 1}$ avec
   $\boxed{Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k \text{ et } R = \frac{B}{X - 1} = X^2 + X - 1}$

Exercice 2 1. $z^5 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ On pose $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$z^5 = 1 + \mathrm{i} \Leftrightarrow r^5\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\theta} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^5 & = & 2^{\frac{1}{2}} \\ 5\theta & = & \frac{\pi}{4} + 2k\pi & , k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r & = & 2^{\frac{1}{10}} \\ \theta & = & \frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\boxed{S = \left\{ 2^{\frac{1}{10}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right)}, k \in [\![0, 4]\!] \right\}}$

2. $z^8 + z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + Z + 1 = 0$ avec $Z = z^4 \Leftrightarrow Z = \mathrm{j}$ ou $Z = \bar{j} \Leftrightarrow z^4 = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ ou $z^4 = \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$
$\boxed{S = \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)}, k \in [\![0, 3]\!] \right\}}$

3. $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 4z + 5)^2 = \mathrm{i}^2(z + 1)^2$
$\Leftrightarrow z^2 - 4z + 5 = \mathrm{i}(z + 1)$ ou $z^2 - 4z + 5 = -\mathrm{i}(z + 1)$
$\Leftrightarrow z^2 - (4 + \mathrm{i})z + 5 - \mathrm{i} = 0$ ou $z^2 + (\mathrm{i} - 4)z + 5 + \mathrm{i} = 0$
$\Delta_1 = -5 + 12\mathrm{i} = (x + \mathrm{i}y)^2$ ou $\Delta_2 = \overline{\Delta_1}$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & -5 \\ x^2 + y^2 & = & 13 \\ 2\mathrm{i}xy & = & 12\mathrm{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 & = & 4 \\ y^2 & = & 9 \\ xy & > & 0 \end{cases}$$

$\Delta_1 = (2 + 3\mathrm{i})^2$ et $\Delta_2 = (2 - 3\mathrm{i})^2$ $\boxed{S = \{3 + 2\mathrm{i}, 3 - 2\mathrm{i}, 1 - \mathrm{i}, 1 + \mathrm{i}\}}$

4. $(z + 1)^3 - (z - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow Z^3 = 1$ où $Z = \dfrac{z + 1}{z - 1}$ avec $z \neq 1 \Leftrightarrow Z = a$ où $a = 1, \mathrm{j}, \bar{\mathrm{j}}$

On résout $\dfrac{z + 1}{z - 1} = a, z \neq 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{1 + a}{a - 1}$ pour $a \neq 1$ $\boxed{S = \left\{ \frac{1 + \mathrm{j}}{\mathrm{j} - 1}, \frac{1 + \bar{\mathrm{j}}}{\bar{\mathrm{j}} - 1} \right\}}$

Exercice 3 Soit $P = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$.

1. $X^4 - 6X^3 + 9X^2 = X^2(X^2 - 6X + 9) = X^2(X - 3)^2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

2. $P = X^2(X-3)^2 + 9 = [X(X-3)+3\mathrm{i}][X(X-3)-3\mathrm{i}] =$
   $\boxed{(X^2-3X+3\mathrm{i})(X^2-3X-3\mathrm{i})}$
   $P =$
   $\left(X - \frac{1}{2}(3-(2-\mathrm{i})\sqrt{3})\right)\left(X - \frac{1}{2}(3+(2-\mathrm{i})\sqrt{3})\right)\left(X - \frac{1}{2}(3-(2+\mathrm{i})\sqrt{3})\right)\left(X - \frac{1}{2}(3+(2+\mathrm{i})\sqrt{3})\right)$
   dans $\mathbb{C}[X]$
   $\boxed{P = (X^2-(3-2\sqrt{3})X + 24 + 12\sqrt{3})(X^2-(3+2\sqrt{3})X + 24 - 12\sqrt{3}) \text{ dans } \mathbb{R}[X].}$

Exercice 4 Soit $P = (1+X)^5 - (1-X)^5$.

1. En utilisant la formule du binôme de Newton pour $(1+X)^5$ et pour $(1-X)^5$, on constate que les puissances paires de X dans P ont un coefficient nul et on obtient $P = 2(X^5+10X^3+5X) = \boxed{2X(X^4+10X^2+5).}$
2. $X^2+10X+5 = 0 \Leftrightarrow X = -5+2\sqrt{5}$ ou $X = -5-2\sqrt{5}$
   Puis $X^2 = -5+2\sqrt{5} < 0 \Leftrightarrow X = \mathrm{i}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ ou $X = -\mathrm{i}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et
   $X^2 = -5-2\sqrt{5} < 0 \Leftrightarrow X = \mathrm{i}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ et $X = -\mathrm{i}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
   $\boxed{P = 2X(X-\mathrm{i}\sqrt{5-2\sqrt{5}})(X+\mathrm{i}\sqrt{5-2\sqrt{5}})(X-\mathrm{i}\sqrt{5+2\sqrt{5}})(X+\mathrm{i}\sqrt{5+2\sqrt{5}}) \text{ dans } \mathbb{C}[X]}$
   $\boxed{P = 2X(X^2+5-2\sqrt{5})(X^2+5+2\sqrt{5}) \text{ dans } \mathbb{R}[X].}$

Exercice 5

1. (Analyse) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul et vérifiant l'équation (E).

   (a) On pose $n = \deg(P)$. Comme P est non nul alors $n \in \mathbb{N}$.
   $P'(X)P''(X) = P(X) \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$ donc P' et P'' sont non nuls, car sinon $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$.
   Donc $\deg(P') = n-1 \geq 0$, $\deg(P'') = n-2 \geq 0$ et on a :
   $$\deg(P) = \deg(P'P'') \iff n = (n-1)+(n-2) \iff n = 3.$$
   Donc $\boxed{P \text{ est un polynôme de degré } 3}$.

   (b) On peut donc écrire $P = aX^3+bX^2+cX+d \in \mathbb{C}[X]$, avec $a \neq 0$. Et on a :
   $P' = 3aX^2+2bX+c$, $P'' = 6aX+2b$ et le coefficient dominant de $P'P''$ est $18a^2$.
   Comme $P'(X)P''(X) = P(X)$ et $a \neq 0$, on a : $18a^2 = a \iff a = \frac{1}{18}$.
   Donc $\boxed{\text{le coefficient dominant de } P \text{ est } a = \frac{1}{18}}$.

   (c) $\deg(P') = 2$ donc $\boxed{P' \text{ admet au moins une racine } \alpha \text{ dans } \mathbb{C}}$, d'après le cours sur les équations du second degré à coefficients complexes, ou d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.
   Comme P vérifie (E), on a : $P(\alpha) = \underbrace{P'(\alpha)}_{=0}P''(\alpha) = 0$. Donc $\boxed{\alpha \text{ est racine de } P}$.

   (d) En dérivant chacun des membres de l'égalité (E), on obtient :
   $P'(X) = P''(X)P''(X) + P'(X)P^{(3)}(X)$ donc $[P''(\alpha)]^2 = \underbrace{P'(\alpha)}_{=0} - \underbrace{P'(\alpha)}_{=0}P^{(3)}(\alpha) = 0$.
   Donc on a bien $\boxed{P''(\alpha) = 0}$.

(e) $P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = 0$ donc α est racine de P de multiplicité au moins 3.

Comme le nombre de racines de P comptées avec multiplicités est majoré par $\deg(P) = 3$, α est racine de P de multiplicité 3 et α est l'unique racine de P dans $\mathbb{C}$.

Donc $\boxed{P = \frac{1}{18}(X-\alpha)^3}$, car le coefficient dominant de P est $a = \frac{1}{18}$.

2. (Synthèse) Soit $P = \frac{1}{18}(X-\alpha)^3$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$. On a :
$P' = \frac{3}{18}(X-\alpha)^2$, $P'' = \frac{6}{18}(X-\alpha)$ et $P'P'' = \frac{1}{18}(X-\alpha)^3$. Donc
$P'(X)P''(X) = P(X)$.

Si P est nul, cette égalité est encore vérifiée.

Par analyse-synthèse, on a montré que l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$\boxed{S = \left\{ \frac{1}{18}(X-\alpha)^3 \ , \ \alpha \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ 0_{\mathbb{C}[X]} \right\}}.$$

Exercice 5

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :
$P_n(z) = 0 \iff (z+1)^n = 1 \iff z = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} \right),\ k \in [\![0, n-1]\!]$.

Donc $\boxed{\mathrm{S}_{\mathbb{C}} = \left\{ 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}}$ et $\boxed{P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} \right)}$.

2. $\sin(0) = 0$ donc $P_n = X \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} \right)$.

De plus, comme $P_n = (X+1)^n - 1$, par la formule du binôme on a :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - 1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} X^k = X \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} X^{k-1} \underset{j=k-1}{=} X \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} X^j.$$

Donc $\boxed{P_n = XQ_n, \text{ où } Q_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} X^k}$.

3. On a donc $Q_n(0) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} \right) = \binom{n}{1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1} 0^k}_{=0}$.

Donc $(-2\mathrm{i})^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} = n$. Comme
$(-2\mathrm{i})^{n-1} = 2^{n-1}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)^{n-1} = 2^{n-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(n-1)\pi}{2}}$

et $\prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}$, avec $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{i}k\pi}{n} = \frac{\mathrm{i}\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{\mathrm{i}\pi}{n} \frac{n(n-1)}{2}$ on a

$2^{n-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(n-1)\pi}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n-1)\pi}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = n$ donc $\boxed{\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}}$