Espaces vectoriels

1 Structure d'espace vectoriel

1.1 Addition de deux vecteurs et multiplication par un scalaire

Définition 1. On appelle $\mathbb{K}$-**espace vectoriel** un ensemble E muni de deux lois :

1. une loi de composition interne $\left|\begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{array}\right.$ appelée addition, notée $+$, vérifiant :

   (a) l'associativité : $\forall (u,v,w)\in E^3, \quad (u+v)+w = u+(v+w)$

   (b) l'existence d'un élément neutre, noté $0_E \in E$, tel que : $\forall u\in E, \quad u+0_E = u$

   (c) l'existence d'éléments opposés : $\forall u\in E, \exists v\in E, \quad u+v=0_E \quad$ (v est noté $-u$)

   (d) la commutativité : $\forall (u,v)\in E, \quad u+v=v+u$

2. une loi de composition externe $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,u) & \mapsto & \lambda\cdot u \end{array}\right.$ appelée multiplication par un scalaire, notée $\cdot$ et vérifiant :

   (a) $\forall u\in E, \quad 1\cdot u = u$

   (b) $\forall u\in E, \forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \quad (\lambda+\mu)\cdot u = \lambda\cdot u + \mu\cdot u$

   (c) $\forall (u,v)\in E^2, \forall \lambda\in\mathbb{K}, \quad \lambda\cdot(u+v) = \lambda\cdot u+\lambda\cdot v$

   (d) $\forall u\in E, \forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \quad \lambda\cdot(\mu\cdot u) = (\lambda\mu)\cdot u$

Dans ce cas, les éléments de E sont appelés des **vecteurs**, ceux de $\mathbb{K}$ des **scalaires**, et 0_E est appelé **vecteur nul**.

Notations : Si $(u,v)\in E^2$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, on note $\lambda u = \lambda\cdot u$ et $u-v = u+(-v)$.

Exemples fondamentaux Munir E d'une structure de $\mathbb{K}$-e.v. :

1. $E=\mathbb{K}^n$, où $n\in\mathbb{N}^*$ 2. $E=\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$

3. $E=\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ 4. $E=\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, où $n,p\in\mathbb{N}^*$ 5. $E=\mathbb{K}[X]$.

Dans tout ce qui suit E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété 1. $\forall(u,v)\in E^2$, $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$

1. $0\cdot u=0_E$ et $(-1)\cdot u=-u$
2. $(\lambda-\mu)\cdot u=\lambda u-\mu u$ et $\lambda\cdot(u-v)=\lambda u-\lambda v$
3. $\lambda\cdot u=0_E \iff \lambda=0$ ou $u=0_E$

1.2 Combinaisons linéaires

Rappel Dans l'espace géométrique, deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits **colinéaires** s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v}=\lambda\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{u}=\lambda\overrightarrow{v}$.

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont dits **coplanaires** s' il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{w}=\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}$ ($\overrightarrow{w}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$).

Si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas coplanaires alors pour tout vecteur $\overrightarrow{t}$ il existe $(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{t}=\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}+\gamma\overrightarrow{w}$ ($\overrightarrow{t}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$).

Exemple 1. Dans chaque cas, exprimer w comme combinaison linéaire de u et v :

1. $E=\mathbb{R}^3$, $u=(1,-1,2)$, $v=(1,1,-3)$ et $w=(-3,-7,19)$
2. $E=\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $u=\cos$, $v=\sin$ et $w:t\mapsto A\cos(t+\varphi)$, où $(A,\varphi)\in\mathbb{R}^2$
3. $E=\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $u=I_2$, $v=J_2$ (matrice de 1) et $w=\begin{pmatrix}-1&-3\\-3&-1\end{pmatrix}$

Définition 2. Soit $(u_k)_{1\leq k\leq p}$ une famille de vecteurs de E.

On appelle **combinaison linéaire** de $u_1,\dots,u_p$, tout vecteur u pouvant s'écrire sous la forme

$$u=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k u_k=\lambda_1u_1+\ldots+\lambda_pu_p,\qquad \text{avec } (\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p.$$

Exemple 2. Dans $E=\mathbb{K}[X]$, on considère un polynôme P de degré $n\in\mathbb{N}^*$.

Soit $a\in\mathbb{K}$. Exprimer P comme combinaison linéaire des polynômes $P_k=(X-a)^k$, $k\in[\![0,n]\!]$.

2 Sous espaces vectoriels

2.1 Définition et caractérisation

Définition 3. Soit $F\subset E$. On dit que F est un **sous espace vectoriel** de E s'il vérifie

1. F est non vide : $\exists u\in E$, $u\in F$
2. F est stable par addition : $\forall(u,v)\in F^2$, $u+v\in F$
3. F est stable par multiplication par un scalaire : $\forall u\in F$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda u\in F$.

Conséquence : $\{0_E\}$ et E sont des s.e.v. de E, et tout s.e.v. de E est un $\mathbb{K}$-e.v.

Théorème 1. Caractérisation d'un sev $F \subset E$ est un sev de E ssi il vérifie :

1. $0_E \in F$ 2. $\forall (u,v) \in F^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $u + \lambda v \in F$.

Exemple 3. Déterminer si F est un s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. usuel :

1. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - 3y = 1\}$ 2. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - 3y = 0\}$
3. $F = \mathscr{C}^k(I)$, où $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$
4. F est l'ensemble des suites complexes qui convergent.

Propriété 2. Pour tout entier $k \geq 2$, l'intersection de k s.e.v. de E est un s.e.v. de E.

Exemple 4. Montrer que P et Q sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $D = P \cap Q$:

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\} \text{ et } Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y - z = 0\}.$$

Remarque : Attention, la réunion de deux s.e.v. de E n'est pas, en général, un s.e.v. de E.

Exemple 5. Montrer que $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| = |y|\}$ est la réunion de deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

2.2 Sous espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

Théorème 2. (et définition) Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille finie de vecteurs de E.

L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$, noté

$$\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p) = \left\{ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\}.$$

est un s.e.v. de E, appelé **s.e.v. engendré** par les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$.

Exemple 6. Montrer que F est un s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. usuel :

1. $F = \{(a - 3b, b, 2a + b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ 2. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + 3z = 0\}$
3. $F = \mathbb{K}_n[X]$, où $n \in \mathbb{N}$ 4. F est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'EDL2 homogène $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Propriété 3. Soit F un s.e.v. de E et $(u_1, \ldots, u_p, u_{p+1})$ une famille finie de vecteurs de E.

1. Si $\{u_1, \ldots, u_p\} \subset F$ alors $\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p) \subset F$.
2. Si $u_{p+1} \in \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$ alors $\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}) = \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$.

Exemple 7. Soit $F = \{(2\alpha - 3\beta + \gamma, \alpha - \gamma),\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\}$. Montrer que $F = \mathbb{R}^2$.

3 Familles finies de vecteurs

3.1 Famille finie libre

Définition 4. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille finie de vecteurs de E.

On dit que $(u_1, \ldots, u_p)$ est une **famille libre** si

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = 0_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0.$$

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Exemple 8. La famille $\mathscr{F}$ est-elle libre dans E si :

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathscr{F} = (u, v)$, avec $u = (1, -2)$ et $v = (-3, 6)$?
2. $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{F} = (u, v, w)$, avec $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ et $w = (1, 1, 1)$?
3. $E = \mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{F} = (1, X, X^2)$?
4. $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ et $\mathscr{F} = (\cos, \sin)$?

Propriété 4. Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille libre de vecteurs de E et $u_{p+1} \in E$ alors

1. toute famille extraite de $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre.
2. $(u_1, \ldots, u_p, u_{p+1})$ est libre ssi $u_{p+1} \notin \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$.

Cas particuliers : Une famille contenant un seul vecteur u est libre ssi $u \neq 0_E$.

Une famille de deux vecteurs non nuls est libre ssi ils ne sont pas colinéaires.

Plus généralement, une famille finie de vecteurs est libre ssi aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres. Dans ce cas, on dit aussi que ses vecteurs sont linéairement indépendants.

Définition 5. Une famille $(P_1, \ldots, P_k)$ de polynômes est dite **à degrés échelonnés** si

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_k).$$

Propriété 5. Toute famille finie de polynômes non nuls et à degrés échelonnés est libre.

Exemple 9. Dans $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{F}$ est-elle libre : a) $\mathscr{F} = (4, 2X + 1, 3X^2)$? b) $\mathscr{F} = (X - 1, X + 1)$?

Propriété 6. Toute famille finie de vecteurs contenant une famille liée est liée.

Cas particuliers : Une famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée.

Une famille de deux vecteurs non nuls est liée ssi ils sont colinéaires.

Plus généralement, une famille finie de vecteurs est liée ssi un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres. Dans ce cas, on dit aussi que ses vecteurs sont linéairement dépendants.

3.2 Famille finie génératrice

Définition 6. Soit F un s.e.v. de E et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille finie de vecteurs de F.

On dit que $(u_1, \ldots, u_p)$ est une **famille génératrice** de F si $F = \text{Vect }(u_1, \ldots, u_p)$.

Exemple 10. (u, v, w) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$ si $u = (-2, 1, 2)$, $v = (0, 3, 1)$ et $w = (-8, 1, 5)$?

Propriété 7. Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de F alors

1. toute famille de vecteurs de F contenant $u_1, \ldots, u_p$ est génératrice de F.
2. $(u_1, \ldots, u_{p-1})$ est génératrice de F ssi $u_p \in \text{Vect}(u_1, \ldots, u_{p-1})$.

3.3 Bases d'un espace vectoriel

Définition 7. $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une **base** de E si $\mathscr{B}$ libre et génératrice de E.

Exemple 11. Donner une base de E si : a) $E = \mathbb{R}^2$ b) $E = \mathbb{K}_2[X]$ b) $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Théorème 3. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.

$\mathscr{B}$ est une base de E ssi tout vecteur u de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_n$:

$$\forall u \in E,\ \exists!(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,\ \ u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Dans ce cas, on dit que $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les **coordonnées** (composantes) de u dans la base $\mathscr{B}$.
On notera $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ la matrice colonne des coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$.

Théorème 4. (et définition) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $i \in [\![1;n]\!]$ on considère le vecteur

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0) \in \mathbb{K}^n, \text{ où 1 est sa } i\text{ème composante.}$$

Alors $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée **base canonique de** $\mathbb{K}^n$.

Exemple 12. Soient $u_1 = (-1, 1)$, $u_2 = (3, -2)$ et $w = (2, 3)$.

Montrer que $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w)$.

Théorème 5. (et définition) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-e.v.

De plus, $\mathscr{B} = (1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée **base canonique de** $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple 13. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\mathscr{B} = \left((X-a)^k\right)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, puis déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

Théorème 6. (et définition) Dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour $(i, j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on note

$E_{i,j}$ la matrice de coefficients tous nuls sauf celui de la ligne i et colonne j qui vaut 1.

Alors $\mathscr{B} = (E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée **base canonique de** $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 14. Montrer que $\mathscr{A}\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ est un s.e.v. de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $\mathscr{A}\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.

4 Somme de sous espaces vectoriels

Dans toute cette partie, F **et** G **sont deux s.e.v. de** E.

Théorème 7. (et définition) Si $F + G = \{u + v,\ (u, v) \in F \times G\ \}$.

alors $F + G$ est un s.e.v. de E, appelé **somme** de F et G.

Exemple 15. Dans chaque cas, déterminer $F + G$:

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}\ ((1, -1, 1))$ et $G = \mathrm{Vect}\ ((2, 0, 1))$
2. $E = \mathbb{K}_2[X]$, $F = \mathbb{K}_1[X]$ et $G = \{aX^2,\ a \in \mathbb{K}\}$.

Propriété 8. Soit un entier $p \geq 2$, $k \in [\![1, p-1]\!]$ et $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de E.

Si $F = \mathrm{Vect}\ (u_1, \dots, u_k)$ et $G = \mathrm{Vect}\ (u_{k+1}, \dots, u_p)$ alors $F + G = \mathrm{Vect}\ (u_1, \dots, u_p)$.

Remarque : $F+G=G+F$, $F \subset F+G$, $G \subset F+G$ et $G \subset F \Longrightarrow F+G=F$.

Définition 8. On dit que F et G sont en **somme directe** si tout vecteur w de $F+G$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur u de F et d'un vecteur v de G :

$$\forall w \in F+G,\ \exists!(u,v) \in F \times G,\ w=u+v.$$

Dans ce cas, cette somme est notée $F \oplus G$ et appelée somme directe de F et G.

Propriété 9. F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$.

Exemple 16. Dans chaque cas, déterminer si F et G sont en somme directe :

1. $E=\mathbb{R}^3$, $F=\text{Vect}\,((1,-1,1))$ et $G=\text{Vect}\,((2,0,1))$
2. $E=\mathbb{K}_2[X]$, $F=\mathbb{K}_1[X]$ et $G=\{aX^2,\ a \in \mathbb{K}\}$.

Définition 9. On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E si tout vecteur w de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur u de F et d'un vecteur v de G :

$$\forall w \in E, \exists!(u,v) \in F \times G, w=u+v.$$

Propriété 10. F et G sont supplémentaires dans E ssi $E=F \oplus G$

c.à.d. $E=F+G$ et $F \cap G = \{0_E\}$

Exemple 17. Soient $D=\text{vect}\,((-2,1,2))$ et $P=\text{Vect}\,((0,3,1),(-8,1,5))$.

Montrer que D et P sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

5 Espaces vectoriels de dimension finie

5.1 Bases d'un espace vectoriel de dimension finie

Définition 10. On dit que E est de **dimension finie** si E admet une famille génératrice finie.

Exemple 18. $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie puisqu'ils sont engendrés par des familles de vecteurs finies (les bases canoniques respectives, par exemple).

Lemme 1. Si $\mathscr{G} = (u_1, \ldots, u_n)$ est une famille génératrice de E et $\mathscr{F} = (u_i)_{i \in I}$ est une famille libre et extraite de $\mathscr{G}$ alors il existe une base $\mathscr{B} = (u_j)_{j \in J}$ de E extraite de $\mathscr{G}$ et contenant $\mathscr{F}$ ($I \subset J \subset [\![1, n]\!]$).

Théorème 8. de la base extraite Si E est non réduit à $\{0_E\}$ et de dimension finie, alors de toute famille génératrice $\mathscr{G}$ de E, on peut extraire une base $\mathscr{B}$ de E.

Corollaire 1. Existence de base Tout e.v. non nul de dimension finie admet une base.

Exemple 19. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$, où $u = (1, 0, -1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (2, -1, -3)$. Déterminer une base de F, extraite de $\mathscr{G} = (u, v, w)$.

Théorème 9. de la base incomplète Si E est non nul et de dimension finie, alors toute famille $\mathscr{F}$ de E qui est libre, peut être complétée en une base $\mathscr{B}$ de E.

Exemple 20. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère les polynômes $P = X - 1$ et $Q = X + 1$.

Trouver un polynôme $R \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que (P, Q, R) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

5.2 Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Lemme 2. fondamental Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.

Exemple 21. Montrer que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie.

Théorème 10. (et définition) Si E est non nul et de dimension finie alors toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs.

Ce nombre est appelé **dimension** de E, et noté $\dim(E)$. Par convention, $\dim(\{0_E\}) = 0$.

Cas particuliers : Soient u et v deux vecteurs non nuls et non colinéaires de E.

1. $F = \mathrm{Vect}(u)$ est un s.e.v. de E de dimension 1, appelé droite vectorielle.
2. $G = \mathrm{Vect}(u, v)$ est un s.e.v. de E de dimension 2, appelé plan vectoriel.

Application : (e.v. de dimension finie usuels)

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\dim(\mathbb{K}^n) = n$ 2. Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

3. Si $n, p \in \mathbb{N}^*$ alors $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$

Exemple 22. Déterminer la dimension de $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, l'espace vectoriel E est non nul et de dimension finie.

5.3 Familles d'un espace vectoriel de dimension finie

Propriété 11. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

1. Si $(u_1, \dots, u_p)$ est libre alors $p \leq \dim(E)$.

   Si $p > \dim(E)$ alors $(u_1, \dots, u_p)$ est liée.

2. Si $(u_1, \dots, u_p)$ est libre et si $p = \dim(E)$ alors $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de E.

Exemple 23. Soient les vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 1)$, $w = (3, 2, 1)$ et $t = (1, 2, 3)$.

1. Montrer que la famille (u, v, w, t) est liée.

2. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Propriété 12. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

1. Si $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E alors $p \geq \dim(E)$.

   Si $p < \dim(E)$ alors $(u_1, \dots, u_p)$ n'est pas génératrice de E.

2. Si $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E et $p = \dim(E)$ alors $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de E.

5.4 Sous espaces vectoriels de dimension finie

Définition 11. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

On appelle **rang** de $(u_1, \dots, u_p)$ le nombre entier noté rg $(u_1, \dots, u_p)$ défini par

$$\text{rg}\ (u_1, \dots, u_p) = \dim\left(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)\right).$$

Cas particuliers : • Si $u = 0_E$ alors rg $(u) = 0$, sinon rg $(u) = 1$.

• Si u et v sont colinéaires et non nuls, alors rg $(u, v) =$ rg $(u) = 1$.

• Si u et v ne sont pas colinéaires, alors rg $(u, v) = 2$.

• Si u_{p+1} est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_p$ alors rg $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}) =$ rg $(u_1, \dots, u_p)$.

Exemple 24. Déterminer rg (u, v, w) si 1. $u = (1, 2, 3)$, $v = (1, 1, 1)$ et $w = (-1, 1, 3)$.
2. $u = (-2, 1, 2)$, $v = (1, 3, 1)$ et $w = (-8, 1, 7)$.

Remarque : Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $C_i = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_i)$ pour $i \in [\![1, p]\!]$, alors rg $(u_1, \ldots, u_p)$ = rg (A) =rg (S), où $A = (C_1|\cdots|C_p) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(S) :\ AX = 0_{n,1}$.

Propriété 13. Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille de p vecteurs de E alors

1. rg $(u_1, \ldots, u_p) \leq p$
2. $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre ssi rg $(u_1, \ldots, u_p) = p$
3. $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de E ssi rg $(u_1, \ldots, u_p) = p = \dim(E)$

5.5 Sev d'un espace vectoriel de dimension finie

Propriété 14. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie.

1. Si F est un sev de E alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
2. Si F est un sev de E et si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

Exemple 25. Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ contenant $u = (1, 0, -1)$, $v = (1, 1, 1)$ et $w = (2, -1, -3)$.

Montrer que $F = \mathbb{R}^3$.

Théorème 11. Formule de Grassmann Si F et G sont des sev de E de dimension finie, alors $F \cap G$ et $F + G$ sont des s.e.v. de E de dimension finie vérifiant

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Exemple 26. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base canonique (e_1, e_2, e_3) et le vecteur $e_4 = (1, 2, 3)$.

Déterminer la dimension de $F \cap G$, si $F = \mathrm{Vect}\ (e_1, e_2)$ et $G = \mathrm{Vect}\ (e_3, e_4)$.

Propriété 15. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une famille finie de vecteurs de E.

1. Si $\mathscr{B}$ est libre alors $\mathrm{Vect}\ (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathrm{Vect}\ (e_{p+1}, \ldots, e_n)$ sont en somme directe.
2. Si $\mathscr{B}$ est une base de E alors $E = \mathrm{Vect}\ (e_1, \ldots, e_p) \oplus \mathrm{Vect}\ (e_{p+1}, \ldots, e_n)$.

Exemple 27. Soient $D = \mathrm{Vect}\ ((1, 0, 2))$ et $P = \mathrm{Vect}\ ((0, 1, 0), (1, 1, 1))$.

Montrer que D et P sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Propriété 16. Si E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et F un sev de E alors F admet un sev supplémentaire dans E et tous les sev supplémentaires de F ont même dimension.

Exemple 28. Trouver plusieurs sev supplémentaires de $P = \text{Vect}\left((0,1,0),(1,1,1)\right)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Théorème 12. Soient F, G deux sev de E.

$$E = F \oplus G \text{ ssi } F \cap G = \{0_E\} \text{ et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E).$$

Théorème 13. (et définition) Soient F et G deux s.e.v. de E supplémentaires.

Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F et si $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est une base de G alors

$(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est une base de E, dite **base adaptée** à la décomposition $E = F \oplus G$.

Exemple 29. Montrer que $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et déterminer une base adaptée à cette décomposition.