

Espaces vectoriels

Exercice 1 Les ensembles suivants sont-ils sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel $\mathbb{R}^n$?

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \geq 0\}$
2. $B = \{(a, a+1), a \in \mathbb{R}\}$
3. $C = \{(a+b-c, 2b+c), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$
4. $D = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x-t=0 \text{ et } 2y+3z=0 \text{ et } y-z=0\}$

Exercice 2 Les ensembles A , B et $C = A \cap B$ suivants sont-ils sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel usuel ?

1. $A = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) / f'' + f' + f = 0\}$, $B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(0) = 0\}$
2. $A = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$, $B = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u_n \rightarrow 0\}$
3. $A = \{P \in \mathbb{R}[X] / P = 0 \text{ ou } \deg(P) = 3\}$, $B = \{P \in \mathbb{R}_4[X] / XP' - 2P = 0\}$

Exercice 3 La famille de vecteurs $\mathcal{F}$ est-elle libre ou liée si :

1. $\mathcal{F} = (u, v)$ avec $u = (1, -1)$ et $v = (-2, 2)$?
2. $\mathcal{F} = (u, v, w)$ avec $u = (1, 1, 2)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (0, 1, 1)$?

Exercice 4 Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ puis déterminer une base de F .

Exercice 5 Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$, et $\mathcal{F} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ la famille de fonctions définies par $\varphi_k(t) = e^{\alpha_k t}$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre.
2. Est-elle une base de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$?

Exercice 6 Dans chaque cas, montrer que E est un $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension 2 :

1. $E = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) / 2f'' + f' + f = 0\}$
2. $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0\}$
3. $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = P(2) = 0\}$

Exercice 7 Soit $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ et les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_4, \vec{v}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{v}_3 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4, \\ \vec{w}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{w}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{w}_3 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_4, \vec{w}_4 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4$$

1. Montrer que les familles $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ et $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ sont libres.
2. Posons $G = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Prouver que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ en est une base.

3. Posons $H = \text{Vect} \{ \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4 \}$. Déterminer sa dimension.
4. Montrer que $G + H = \mathbb{R}^4$. Cette somme est-elle directe ?
5. Déterminer une base de $G \cap H$.

Exercice 8 L'objectif est de déterminer, par analyse-synthèse, l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant (E) : $P(X) = P'(X)P''(X)$.

1. (Analyse) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul vérifiant l'équation (E).
 - (a) Déterminer le degré de P .
 - (b) Déterminer le coefficient dominant de P .
 - (c) Justifier que le polynôme P' admet une racine α dans $\mathbb{C}$. Montrer que $P(\alpha) = 0$.
 - (d) En dérivant chacun des membres de l'égalité (E), montrer que $P''(\alpha) = 0$.
 - (e) Dédire de tout ce qui précède, la factorisation de P en irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
2. (Synthèse) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 9 On note $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à deux, et $\mathbb{R}_1[X]$ celui des polynômes de degré inférieur ou égal à un.

1. On considère l'ensemble $E = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] / P(-1) = P'(-1) = 0 \}$.
Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, puis déterminer une base et la dimension de E .
2. On considère la famille de polynômes $\mathcal{B}' = (X^2, (X+1)^2, (X+2)^2)$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. En déduire un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}_2[X]$.
 - (b) Exprimer les polynômes 1 et X comme combinaisons linéaires des polynômes de $\mathcal{B}'$.
 - (c) Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.
Déterminer, en fonction de a , b et c , la matrice colonne des coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 10 On considère l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et on note $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) l'ensemble des fonctions réelles paires (resp. impaires).

1. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
2. En déduire que la fonction $\exp$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, à déterminer.