# Correction du devoir maison n$^o$ 13

**Exercice 1** Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X-2)^{2n}+(X-3)^n+1$ par

1. $(X-3)(X-2)$ : $(X-2)^{2n}+(X-3)^n+1 = Q(X-3)(X-2)+R$ avec $\deg R < 2$. On pose $R = aX+b$

   Pour $X=2$ on obtient $(-1)^n+1 = 2a+b$

   Pour $X=3$ on obtient $2 = 3a+b$

   D'où $a = 1-(-1)^n$ et $b = (-1)^n+1-2a = 3(-1)^n-1$ puis

   $\boxed{R = (1-(-1)^n)\,X + 3(-1)^n - 1 = 2 \text{ si } n \text{ est pair et } 2X-4 \text{ sinon}}$

2. $(X-3)^2$ : $(X-2)^{2n}+(X-3)^n+1 = Q(X-3)^2+R$ $(*)$ avec $\deg R < 2$. On pose $R = aX+b$

   Pour $X=3$ on obtient $2 = 3a+b$

   En dérivant $(*)$ on obtient $2n(X-2)^{2n-1}+n(X-3)^{n-1} = 2(X-3)Q+(X-3)^2Q'+a$

   Pour $X=3$ on obtient $2n = a$ puis $b = 2-3a = 2-6n$ et $\boxed{R = 2nX+2-6n}$

**Exercice 2**

0. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(z_0)=0$. En conjuguant cette égalité on obtient $\overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0$.
Or $\overline{P(z_0)} = P(\overline{z_0})$ d'après les propriétés algébriques de la conjugaison et car les coefficients de $P$ sont des nombres réels, égaux à leurs conjugués.

$\boxed{\overline{z_0} \text{ est donc aussi une racine du polynôme } P}$

Soit $P = X^8+2X^6+3X^4+2X^2+1$.

1. $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ donc $j^3 = 1$

   $P(j) = j^8+2j^6+3j^4+2j^2+1$

   $P(j) = j^2+2+3j+2j^2+1 = 3(j^2+j+1) = 0$ car $j^2+j+1 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = 0$ donc

   $\boxed{j \text{ est bien racine de } P.}$

2. $P(-X) = P(X)$ donc $P$ est pair.

3. On sait que $P$ est divisible par $X-j$ et par la question 0. on en déduit que $P$ est divisible par $X-\overline{j}$ et par la question 2. que $P$ est également divisible par $X+j$ et $X+\overline{j}$. $P$ est alors divisible par le produit

   $(X-j)(X-\overline{j})(X+j)(X+\overline{j}) = (X^2+X+1)(X^2-X+1) = X^4+X^2+1$

4. $P = (X^4+X^2+1)D = D^2$ en posant la division euclidienne.

5. $\boxed{P = (X-j)^2(X-\overline{j})^2(X+j)^2(X+\overline{j})^2 \text{ dans } \mathbb{C}[X]}$

   $\boxed{P = (X^2+X+1)^2(X^2-X+1)^2 \text{ dans } \mathbb{R}[X].}$