Correction du Test n° 13

1. Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. On note j le nombre complexe $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

   (a) Le début du développement de $(X+1)^7$ est $X^7 + 7X^6$, d'après la formule du binôme de Newton, ce qui montre que $\boxed{\deg P = 6.}$

   (b) $P(0) = P(-1) = 0$ donc $\boxed{0 \text{ et } -1 \text{ sont racines de } P.}$

   (c) $1 + j + j^2 = \dfrac{j^3 - 1}{j - 1} = 0$ car $j = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} \neq 1$ et $j^3 = 1$.

   (d) $P(j) = (j+1)^7 - j^7 - 1$. Or $(j+1)^7 = (-j^2)^7 = -j^{14} = -j^2(j^3)^4 = -j^2$ et $j^7 = jj^6 = j$. On en déduit que $P(j) = -(j^2 + j + 1) = 0$.

   $P'(X) = 7(X+1)^6 - 7X^6$ donc $P'(j) = 7(-j^2)^6 - 7j^6 = 7(j^3)^4 - 7(j^3)^2 = 0$

   Donc $\boxed{j \text{ est racine de } P \text{ avec une multiplicité d'au moins 2.}}$

   (e) Comme $P, P' \in \mathbb{R}[X], \overline{j}$ est également racine de P avec une multiplicité d'au moins 2. La multiplicité de j et de $\overline{j}$ dans P est alors exactement de 2, puisque $\deg P = 6$.

   De plus, le coefficient dominant de P est 7 d'après (a).

   $\boxed{\text{On en déduit la factorisation de } P \text{ dans } \mathbb{C}[X] : P = 7X(X+1)(X-j)^2(X-\overline{j})^2}$