

Correction du devoir maison n° 14

Pour tout $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on note $\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

On considère, pour tout entier naturel $n > 1$, le polynôme $Q_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.

1. (a) Le terme en X^n s'annule mais celui en X^{n-1} est égal à $2 \binom{n}{n-1} X^{n-1} = 2nX^{n-1}$.

Le polynôme Q_n est donc de degré $n-1$ et de coefficient dominant $2n$.

- (b) Q_n ne s'annule pas pour $X=1$ puisque $Q_n(1) = 2^n$ et $Q_n(X) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{X+1}{X-1}\right)^n = 1$

Les solutions de l'équation $Z^n = 1$ sont $e^{2i\alpha_k}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ où $\alpha_k = \frac{k\pi}{n}$

$$\frac{X+1}{X-1} = e^{2i\alpha_k} \Leftrightarrow X = \frac{1+e^{2i\alpha_k}}{1-e^{2i\alpha_k}} = \frac{\cos(\alpha_k)}{i\sin(\alpha_k)} = -i\cotan \alpha_k$$

En éliminant la valeur $k=0$ pour laquelle $X=1$, on obtient

$$Q_n = 0 \Leftrightarrow X = -i\cotan \alpha_k, k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$$

- (c) Les $n-1$ valeurs obtenues à la question précédente sont distinctes. Le polynôme Q_n étant de degré $n-1$ et de coefficient dominant $2n$, on peut en déduire sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

$$Q_n = 2n \prod_{k=1}^{n-1} \left(X + i\cotan \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right)$$

2. On considère le polynôme $P_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} X^k, n > 1$.

- (a) $Q_{2n+1}(X) = (X+1)^{2n+1} - (X-1)^{2n+1}$

$$Q_{2n+1}(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^{2n+1-k} X^k$$

$$Q_{2n+1}(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k [1 - (-1)^{2n+1-k}]$$

Or $1 - (-1)^{2n+1-k} = 0$ si $2n+1-k$ est pair, c'est-à-dire pour k impair, et vaut 2 sinon. En posant $k=2j$, on obtient

$$Q_{2n+1}(X) = 2 \sum_{j=0}^n \binom{2n+1}{2j} X^{2j} = 2P_n(X^2)$$

- (b) D'après la question précédente, si a est une racine de $Q_{2n+1}(X)$, alors a^2 est une racine de $P_n(X)$

donc $\left(i\cotan \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right)^2 = -\cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)$ sont racines de P_n pour tout $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$.

Or le degré de P_n est n et en remarquant que $\cotan(\pi - x) = -\cotan x$, on trouve n

racines simples en prenant $-\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

(c) La somme des racines de P_n est, en notant (a_k) les coefficients de P_n ,

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{\binom{2n+1}{2n-2}}{\binom{2n+1}{2n}} = -\frac{(2n+1)!}{(2n+1)(2n-2)!3!} = -\frac{2n(2n-1)}{3!} = \boxed{-\frac{n(2n-1)}{3}}$$

(d) D'après les deux questions précédentes, $\sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$

3. (a) On pose $g(x) = \sin(x) - x$, on a $g'(x) = \cos(x) - 1$ qui est négative sur $\mathbb{R}$ donc la fonction g est décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et vérifie $g(0) = 0$, elle est donc négative sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

De même, si on pose $h(x) = \tan(x) - x$, on a $h'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geq 0$, donc h est croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et vérifie $h(0) = 0$, h est donc positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

Remarque On peut aussi utiliser la concavité de la fonction sinus, la convexité de la fonction tangente et les tangentes en 0.

(b) Tous les termes de l'encadrement précédent sont positifs, on peut l'élever au carré puis passer à l'inverse : $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$0 < \sin x \leq x \leq \tan x \Rightarrow 0 < \sin^2 x \leq x^2 \leq \tan^2 x \Rightarrow \frac{1}{\tan^2 x} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\text{Or } \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = 1 + \cotan^2 x \text{ d'où}$$

$$\boxed{\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \cotan^2 x \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \cotan^2 x}$$

(c) En posant $x = \frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on obtient

$$\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq 1 + \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \text{ puis}$$

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left(1 + \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$$

On additionne tous les encadrements pour k variant entre 1 et n , et on utilise bien sûr le résultat de la question 2.(d)

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left(n + \frac{n(2n-1)}{3}\right) =$$

$$\pi^2 \left(\frac{n}{(2n+1)^2} + \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2}\right)$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(2n+1)^2} = 0$ et par le théorème des gendarmes

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$