Correction Test n° 14

Sujet A

1. Le polynôme nul est solution. Maintenant, si P est un polynôme non nul solution, alors le degré de $\deg(P \circ P) = \deg(P)^2$, et donc on doit avoir $\deg(P)^2 = \deg(P)$
- On en déduit que $\deg(P) = 1$ ou $\deg(P) = 0$, c'est-à-dire que le polynôme P est de degré 1 ou 0.

$$\begin{aligned} P \circ P(X) &= a(aX + b) + b \\ \text{Soit donc } P(X) = aX + b, \text{ alors} & \\ &= a^2X + (ab + b) \end{aligned}$$

et on doit donc avoir $a^2 = a$, soit $a = 1$ ou $a = 0$, et $ab = 0$. Si $a = 1$, alors nécessairement $b = 0$, tandis que si $a = 0$, alors b peut être quelconque.

Finalement, on trouve que les solutions sont les polynômes constants et le polynôme identité $P(X) = X$.

2. On considère le point $A(1, -2, 1)$ et la droite (D) définie par le système d'équations cartésiennes
- $$\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

- (a) (D) est l'intersection du plan $P : x - 2y + z - 1 = 0$ dont un vecteur normal est

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et du plan } P' : x + y - 2z + 2 = 0 \text{ dont un vecteur normal est } \vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Un vecteur directeur de } (D) \text{ est donc } \vec{n} \wedge \vec{n}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ On peut choisir } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comme vecteur directeur de (D) . Le point $B(1, 1, 2) \in (D)$.

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ donc } d(A, (D)) = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{AB}\|}{\|\vec{u}\|} = \sqrt{\frac{14}{3}}$$

- (b) P est orthogonal à la droite (D) donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à P .

$$P : x + y + z + d = 0 \text{ avec } A \in P \text{ donc } d = 0 \text{ et } P : x + y + z = 0.$$

$$(c) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \text{ est une représentation paramétrique de } (D)$$

$$x + y + z = 0 \Rightarrow 4 + 3t = 0 \Rightarrow t = -\frac{4}{3} \text{ donc } H \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

Sujet B

1. Le polynôme nul est solution. Maintenant, si P est un polynôme non nul solution, alors le degré de $\deg(P \circ P) = \deg(P)^2$, et donc on doit avoir $\deg(P)^2 = \deg(P)$

On en déduit que $\deg(P) = 1$ ou $\deg(P) = 0$, c'est-à-dire que le polynôme P est de degré 1 ou 0.

Soit donc $P(X) = aX + b$, alors

$$\begin{aligned} P \circ P(X) &= a(aX + b) + b \\ &= a^2X + (ab + b) \end{aligned}$$

et on doit donc avoir $a^2 = a$, soit $a = 1$ ou $a = 0$, et $ab = 0$. Si $a = 1$, alors nécessairement $b = 0$, tandis que si $a = 0$, alors b peut être quelconque.

Finalement, on trouve que les solutions sont les polynômes constants et le polynôme identité $P(X) = X$.

2. On considère les points $B(1, 2, 0)$, $D(3, -1, 0)$, $E(1, 1, 4)$, $F(2, 3, 4)$ et $G(5, 2, 4)$.

(a) Donner une équation cartésienne du plan (BEG) .

$$\vec{BE} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{BG} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{BE} \wedge \vec{BG} \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ donc on peut prendre comme vecteur}$$

normal au plan (BEG) le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $(BEG) : -x + 4y + z + d = 0$ avec

$B \in (BEG)$ donc $d = -7$ puis $(BEG) : -x + 4y + z - 7 = 0$

(b) $F\vec{D} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}$ donc la droite (FD) n'est pas orthogonale au plan (BEG) .

$$(c) \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \text{ est une représentation paramétrique de la droite } (FD)$$

$$-x + 4y + z - 7 = 0 \Rightarrow 21t - 14 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3} \text{ donc } H \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3} \right)$$

$$(d) d(F, (BEG)) = \frac{|-x_F + 4y_F + z_F - 7|}{\sqrt{1 + 4^2 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{18}} = \frac{7}{3\sqrt{2}}$$