

# Analyse asymptotique

## 1 Relations de comparaison : cas des fonctions

Dans toute cette partie,  $f$  et  $g$  sont des fonctions définies sur un intervalle  $I$ ,  $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  est élément ou extrémité de  $I$ , et  $g$  ne s'annule pas sur  $I \setminus \{a\}$ .

### 1.1 Relations de domination et de négligeabilité

**Définition 1.** On dit que  $f$  est **dominée** par  $g$  en  $a$  si  $\frac{f}{g}$  est bornée au voisinage de  $a$ .

Dans ce cas, on note  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ , et on dit que  $f$  est un "grand o" de  $g$  en  $a$ .

**Exemple 1.** Montrer que a)  $5x^3 - 3x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^2)$  b)  $5x^3 - 3x^2 \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} \mathcal{O}(x^3)$ .

**Définition 2.** On dit que  $f$  est **négligeable** devant  $g$  en  $a$  si  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .

Dans ce cas, on note  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ , et on dit que  $f$  est un "petit o" de  $g$  en  $a$ .

**Exemple 2.** Montrer que a)  $5x^3 - 3x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$  b)  $5x^3 - 3x^2 \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} o(x^4)$ .

**Propriété 1.** La relation de négligeabilité vérifie :

1.  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)) \implies f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \mathcal{O}(g(x))$  (la réciproque est fausse).
2.  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(1) \iff f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .
3.  $\left( f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)) \text{ et } g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x)) \right) \implies f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$  **transitivité**.

**Propriété 2. Croissances comparées** Pour tous réels  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  et  $\gamma > 0$  on a

$$[\ln(x)]^\gamma \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha), \quad x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\beta x}) \text{ et } [\ln(x)]^\gamma \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\beta x}).$$

**Propriété 3. Opérations sur les o** Si  $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  alors

$$\begin{aligned} o(x^n) + o(x^n) &\underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n) & \lambda \times o(x^n) &\underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n) \\ x^p \times o(x^n) &\underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{n+p}) & \frac{1}{x^p} \times o(x^n) &\underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{n-p}). \end{aligned}$$

## 1.2 Relation d'équivalence

**Définition 3.** On dit que  $f$  est **équivalente** à  $g$  en  $a$  si  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ .

Dans ce cas, on note  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ .

**Exemple 3.** Démontrer que a)  $5x^3 - 3x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -3x^2$       b)  $5x^3 - 3x^2 \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} 5x^3$

**Propriété 4.** La relation d'équivalence vérifie :

1. Si  $\ell \in \mathbb{R}^*$  alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ell \iff f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff f(x) - \ell \underset{x \rightarrow a}{=} o(1)$ .

Dans ce cas, on écrit  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \ell + o(1)$ .

2.  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ .

Dans ce cas, on écrit  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x))$ .

3. De plus, la relation " $\sim$ " pour les fonctions est réflexive, symétrique et transitive.

**Propriété 5. Équivalents usuels**     $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$      $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$      $\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad 1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x, \forall \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

**Propriété 6. Compatibilité avec les opérations**

Si  $f, g, h$  et  $l$  sont telles que  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  et  $h(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} l(x)$  alors

$$1. f(x)h(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)l(x) \quad \frac{f(x)}{h(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{g(x)}{l(x)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, [f(x)]^k \underset{x \rightarrow a}{\sim} [g(x)]^k$$

$$2. \text{ si } f \text{ et } g \text{ sont strictement positives au voisinage de } a, \forall \alpha \in \mathbb{R}, [f(x)]^\alpha \underset{x \rightarrow a}{\sim} [g(x)]^\alpha.$$

**Remarque :** La relation d'équivalence est compatible avec la multiplication, la division, l'élevation à une puissance constante, mais pas avec l'addition et la composition en général.

**Propriété 7.** 1. Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  alors  $f$  et  $g$  sont de même signe au voisinage de  $a$ .

2. Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ .

**Exemple 4.** Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de  $f$

$$1. \text{ a) } f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} \text{ en } 0 \quad \text{b) } f(x) = (1 + \tan(x))^{\frac{1}{x}} \text{ en } 0$$

$$2. \text{ a) } f(x) = \frac{3x^2 - x + 7}{\sqrt{5x^4 - 2x + 1}} \text{ en } -\infty \quad \text{b) } f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ en } +\infty$$

## 2 Développements limités

Dans cette partie,  $f$  est définie sur un intervalle  $I$ , et  $a \in \mathbb{R}$  est élément ou extrémité de  $I$ .

### 2.1 Développement limité en $a$

**Définition 4.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On dit que  $f$  admet un **développement limité** à l'ordre  $n$  en  $a$ , noté  $DL_n(a)$ , s'il existe des réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Dans ce cas, l'expression polynomiale  $P_n(x-a) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n$  est la partie régulière du  $DL_n(a)$  de  $f$ .

**Remarque :** Une fonction admet un DL en  $a$  à l'ordre 0 ssi elle est continue en  $a$ .

Une fonction admet un DL en  $a$  à l'ordre 1 ssi elle est dérivable en  $a$ .

**Propriété 8.** Si une fonction  $f$  admet un  $DL_n(a)$  alors celui-ci est unique.

**Application :**  $DL_n(0)$  (usuels) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$

**Exemple 5.**  $DL_n(0)$  de  $\frac{1}{1+x}$

**Remarque :** Le  $DL_n$  de  $f$  en  $a$  peut se ramener à celui de  $h \rightarrow f(a+h)$  en 0.

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

$$\iff f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + o(h^n).$$

**Exemple 6.**  $DL_n(1)$  de  $f(x) = \frac{3}{2x+1}$ .

**Propriété 9. Troncature** Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$

alors  $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$ .

**Propriété 10. Parité** Soit  $f$  une fonction admettant un  $DL_n(0)$ .

Si  $f$  est paire (resp. impaire) sur  $I$  alors la partie régulière de son  $DL_n(0)$  ne contient que des puissances paires (resp. impaires).

**Théorème 1. Formule de Taylor-Young** (admise)

Si  $f \in \mathcal{C}^n(I)$  et  $a \in I$  alors  $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n)$ .

**Application : DL usuels en 0**  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$$\operatorname{ch} x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

## 2.2 Opérations sur les développements limités

**Propriété 11. Combinaisons linéaires, produit** Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

Si  $f$  et  $g$  admettent des  $DL_n(0)$  de parties régulières respectives  $P_n(x)$  et  $Q_n(x)$  alors

1.  $\lambda f + \mu g$  admet un  $DL_n(0)$  de partie régulière  $\lambda P_n(x) + \mu Q_n(x)$ .
2.  $fg$  admet un  $DL_n(0)$  dont la partie régulière s'obtient en éliminant tous les termes de degré supérieur à  $n$  du produit  $P_n(x)Q_n(x)$ .

**Exemple 7.**  $DL_3(0)$  de  $f(x) = 4x^5 + x^3 - 1 + \frac{7}{1-x}$  et  $g(x) = e^x \cos(x)$ .

**Application :**  $DL_3(0)$  (usuel)  $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ .

**Propriété 12. Composition** Si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

et si  $f$  et  $g$  admettent des  $DL_n(0)$  de parties régulières respectives  $P_n(x)$  et  $Q_n(x)$ , alors

$g \circ f$  admet un  $DL_n(0)$  dont la partie régulière s'obtient en éliminant tous les termes de degré supérieur à  $n$  de  $Q_n(P_n(x)) = Q_n \circ P_n(x)$ .

**Exemple 8.**  $DL_3(0)$  de  $f(x) = e^{\sin(x)}$  et  $g(x) = e^{\cos(x)}$

**Propriété 13. Primitivation** Soit  $f$  continue sur  $I$ , tel que  $0 \in I$ .

Si  $f$  admet un  $DL_n(0)$  alors toute primitive  $F$  de  $f$  admet un  $DL_{n+1}(0)$ .

Dans ce cas, si  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$ , alors le  $DL_{n+1}(0)$  de  $F$  s'écrit

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + a_0x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

**Application :**  $DL(0)$  (usuels)  $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

### 3 Applications des développements limités

#### 3.1 Recherche d'équivalents et calculs de limites

**Propriété 14.** Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de 0 et admettant un  $DL_n(0)$ .

Si  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_px^p + a_{p+1}x^{p+1} + \dots + a_nx^n + o(x^n)$  et  $a_p \neq 0$  alors  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_px^p$ .

**Exemple 9.** Déterminer la limite en 0 de  $f : x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$

#### 3.2 Position relative d'une courbe et de sa tangente

**Méthode :** Si  $f$  admet un développement limité en  $a$  qui s'écrit

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p) \text{ avec } a_p \neq 0,$$

alors  $\mathcal{C}_f$  admet une tangente en  $(a, f(a))$  d'équation  $y = a_0 + a_1(x-a)$  et la position relative de la courbe et de sa tangente au voisinage de  $a$  s'obtient en étudiant le signe du terme  $a_p(x-a)^p$ .

**Exemple 10.** Étudier (localement) la position relative de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à sa tangente en 0 si

$$\text{a) } f = \exp \quad \text{b) } f = \cos \quad \text{c) } f = \sin$$

**Cas particulier :** S'il existe un entier  $p \geq 2$  tel que  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$  avec  $a_p \neq 0$ ,

- Si  $p$  est pair alors  $f$  admet un extremum local en  $a$  (max local si  $a_p < 0$ , min local si  $a_p > 0$ ).
- Si  $p$  est impair alors  $f$  admet un point d'inflexion en  $a$ .

### 3.3 Recherche d'asymptotes (en $\pm\infty$ )

**Définition 5.** Si  $f(x) - (ax + b)$  tend vers 0 en  $\pm\infty$ , on dit que la droite d'équation  $y = ax + b$  est **asymptote oblique** à la courbe  $C_f$  en  $\pm\infty$  (respectivement).

**Méthode :** Si la fonction  $t \mapsto tf\left(\frac{1}{t}\right)$  admet un développement limité en 0 qui s'écrit

$$tf\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1t + a_pt^p + o(t^p) \text{ avec } a_p \neq 0,$$

alors on peut écrire  $f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} a_0x + a_1 + \frac{a_p}{x^{p-1}} + o\left(\frac{1}{x^{p-1}}\right)$ .

Dans ce cas,  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = a_0x + a_1$  en  $\pm\infty$ , et le signe de  $\frac{a_p}{x^{p-1}}$  donne la position relative de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à l'asymptote au voisinage de  $\pm\infty$ .

**Exemple 11.** Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = (2+x)e^{-1/x}$ .

Déterminer les asymptotes à la courbe  $\mathcal{C}_f$ , puis étudier la position relative de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à ses asymptotes.

## 4 Comparaison de suites

**Définition 6.** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles ou complexes telles que  $(v_n)$  ne s'annule plus à partir d'un certain rang.

- On dit que  $(u_n)$  est **dominée** par  $(v_n)$  si la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  est bornée. On note  $u_n = O(v_n)$ .
- On dit que  $(u_n)$  est **négligeable** devant  $(v_n)$  si la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  tend vers 0.

On note  $u_n = o(v_n)$ .

- On dit que  $(u_n)$  est **équivalente** à  $(v_n)$  si la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  tend vers 1. On note  $u_n \sim v_n$ .

Tous les résultats établis pour les fonctions s'étendent au cas des suites.

**Exemple 12.** Déterminer un équivalent simple de la suite  $u_n$  définie par

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}, n \geq 1$$

et en déduire sa limite.