Analyse asymptotique

Exercice 1 Soit f définie sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ par $f(x)=\dfrac{x+2}{2x}\ln(1+x)$.

1. Démontrer que f admet une limite finie ℓ en 0.
2. Déterminer un équivalent et le signe de $f(x)-\ell$ au voisinage de 0.
3. Interpréter graphiquement les résultats précédents.

Exercice 2 Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$.

1. Prolonger f par continuité en 0 et montrer que ce prolongement est dérivable en 0.
2. Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0, puis étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

Exercice 3 Déterminer la position relative de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(1+x+x^2)$ par rapport à ses tangentes localement aux points d'abscisses 0 et 1.

Exercice 4 Soit $f : x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{1-\cos(2x)}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f puis sa période.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 mais pas en π.
3. Démontrer que le prolongement par continuité de f est dérivable en 0 et donner son nombre dérivé, ainsi que la position de sa courbe représentative par rapport à sa tangente localement au point d'abscisse 0.

Exercice 5 On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. Étudier les variations de f et déterminer si elle admet des extrema locaux.
2. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente $\mathcal{T}_0$ en son point d'abscisse 0.
   Donner une équation de $\mathcal{T}_0$ et préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathcal{T}_0$ au voisinage de 0.
3. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique $\mathcal{D}$ en $+\infty$.
   Donner une équation de $\mathcal{D}$ et préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathcal{D}$ au voisinage de $+\infty$.
4. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ en $-\infty$.
   Donner une équation de Δ et préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ au voisinage de $-\infty$.
5. Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.