Devoir maison n° 15

A rendre le jeudi 16 mars 2025

Exercice 1 On considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, m)$, $u_2 = (1, m, 1)$ et $u_3 = (m, 1, 1)$, $m \in \mathbb{R}$ étant un paramètre.

On note $\mathcal{H}$ la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3) et $H = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

1. $[u_1, u_2, u_3] = (u_1 \wedge u_2).u_3 = \begin{pmatrix} 1-m^2 \\ m-1 \\ m-1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -m^3 + 3m - 2 =$
   $(m-1)(-m^2 - m + 2) = (m-1)(m-1)(-m-2)$

   Donc u_1, u_2, u_3 sont coplanaires ssi $m = 1$ ou $m = -2$

   $\boxed{\mathcal{H} \text{ est libre ssi } m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}}$

2. Pour cette question, on suppose que $m = 1$.

   (a) Si $m = 1$ alors $u_3 \in \text{Vect}\ (u_1, u_2)$ d'après la question précédente et $u_1 = u_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $H = \text{Vect}\ (u_1)$

   $\boxed{u_1 = (1, 1, 1) \text{ est une base de } H.}$

   (b) H est une droite donc on peut choisir 2 plans vectoriels quelconques qui la contiennent.

   $\boxed{\text{Un système d'équations cartésiennes de } H \text{ est par exemple } \begin{cases} y - z &= 0 \\ x - y &= 0 \end{cases}}$

3. Pour cette question, on suppose que $m = -2$.

   (a) De même, d'après la question 1., $u_3 \in \text{Vect}\ (u_1, u_2)$ donc (u_1, u_2) est une famille génératrice de H avec u_1 et u_2 non colinéaires, donc (u_1, u_2) est une famille libre.

   $\boxed{\text{Une base } \mathscr{B} \text{ de } H \text{ est } (u_1, u_2) \text{ avec } u_1 = (1, 1, -2) \text{ et } u_2 = (1, -2, 1)}$

   (b) $u_1 \wedge u_2 = (-3, -3, -3) = -3(1, 1, 1), v = (1, 1, 1)$ est alors un vecteur normal au plan H

   $\boxed{\text{Une équation cartésienne de } H \text{ est } x + y + z = 0}$

   (c) On peut prendre $v = (1, 1, 1)$, les vecteurs (u_1, u_2, v) ne sont pas coplanaires et $\boxed{\mathscr{B} \cup \{v\} \text{ est une base de l'espace } \mathbb{R}^3}$ car c'est une famille libre de $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs.

Exercice 2 On considère $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - y + z - t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = y\}$.

1. $(x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow x = y - z + t$ et

$$\begin{pmatrix} y-z+t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $\boxed{\text{est un sev de } \mathbb{R}^4}$

$(x, y, z, t) \in G \Leftrightarrow x = y$ et

$$\begin{pmatrix} y \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $\boxed{\text{est un sev de } \mathbb{R}^4}$

2. $(x, y, z, t) \in F \cap G \Leftrightarrow x = y - z + t$ et $x = y \Leftrightarrow x = y$ et $z = t$

$$\begin{pmatrix} y \\ y \\ t \\ t \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $F \cap G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Ces deux vecteurs étant non colinéaires, ils forment

$\boxed{\text{une base de } F \cap G \text{ et } \dim F \cap G = 2.}$